N°d'ordre : A.O 8.126

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE PROVENCE

AIX-MARSEILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

Janine GIOANNI

La méthode des différences finies en thermoélasticité couplée : Existence des solutions et interprétation physique

Soutenue le 22 février 1973 devant la Commission d'Examen

M. L.SIDERIADES — Président

Mme S.DELACHE
MM. Y.JULLIEN
Th.VOGEL
— Examinateurs

N°d'ordre : A.O 8126

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE PROVENCE

AIX-MARSEILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

Janine GIOANNI

La méthode des différences finies en thermoélasticité couplée :

Existence des solutions et interprétation physique

Soutenue le 22 février 1973 devant la Commission d'Examen

M. L.SIDERIADES — Président

Mme S.DELACHE
MM. Y.JULLIEN
Th.VOGEL
— Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE PROVENCE

U.E.R. Scientifiques

Président : F. BOREL

Secrétaire général : C. MOYNAULT

PROFESSEURS

MM.	J. VALENSI	Mécanique expérimentale des fluides
	P. ROUARD	Physique générale
	P. DESNUELLE	Chimie biologique
	M. MERIGOUX	Physique industrielle
	C. FEHRENBACH	Astronomie
	A. FAVRE	Mécanique de l'atmosphère et météorologie
	A. GUILLEMONAT	Chimie industrielle
	G. CARPENI	Chimie
	Y. DOUCET	Physique
	JM. SOURIAU	Méthodes mathématiques de la physique
	J. METZGER	Chimie
	L. FOURES	Mathématiques
	D. MALE	Physique
	G. BODIOU	Mathématiques appliquées
	M. NAUDET	Chimie des corps gras
	P. BOUSQUET	Physique
	P. PESTEIL	Physique
	P. CASAL	Mécanique rationnelle et appliquée
	G. GOUVERNET	Géologie appliquée
	A. VISCONTI	Physique théorique
	A. BLANCHARD	Mathématiques générales

M. DUSSARDIER	Physiologie animale
P. QUEZEL	Botanique
E. CRAUSSE	Physique (Avignon)
A. JULG	Chimie théorique
S. TAXY (Mme)	Géologie historique
F. TESSIER	Géologie générale
ML. FURNESTIN (Mme)	Biologie animale
M. BERTRAND	Chimie
J. TROMPETTE	Physique
M. LAFFITTE	Chimie
R. FRAISSE	Mathématiques
C. BLANCHARD (Mme)	Mathématiques
R. NEGRE	Biologie végétale
R. COULON	Physique
R. KERN	Minéralogie
L. SIDERIADES	Physique
JM. SURZUR	Chimie organique
H. CHANTREL	Physique de l'espace
J. SOUGY	Géologie
J. HERVE	Electronique
H. BODOT	Chimie
J. CHOUTEAU	Physiologie animale
R. PHILIP	Physique
L. CAPELLA	Minéralogie
P. BILLARD	Mathématiques
M. BONNEAU	Mathématiques
JC. TRAYNARD	Chimie industrielle
C. CLARION (Mlle)	Mécanique des fluides
A. PONS	Botanique
A. GIRARDIE	Zoologie
JC. MAIRE	Chimie
M. SIMON	Physiologie animale
J. MANDELBROJT	Physique
JP. DAVID	Physique
M. BIZOUARD	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

R. AMAR	Zoologie
L. DEVEZE	Biologie marine
F. BOREL	Techniques mathématiques de la physique
R. CHANDEBOIS (Mlle)	Biologie animale
H. GUENOCHE	Mathématiques appliquées
F. PECAUT (Mme)	Mathématiques (Avignon)
J. HENNEQUIN	Electronique
S. GUEIRARD (Mlle)	Pétrographie
C. FEUGEAS	Chimie
J. CABANE	Chimie
G. RASIGNI	Physique
S. COMBET	Chimie
R. GARRON	Physique expérimentale
M. CADILHAC	Physique
B. WAEGELL	Chimie
G. MARCHIS-MOUREN	Chimie biologie
F. HALBWACHS	Physique (Avignon)
R. PETIT	Physique
M. HUGON	Psycho-physiologie
M. PICHENOT (Mlle)	Biologie végétale
M. GILLET	Physique
JP. ROGGERO	Chimie (Avignon)
L. SARDA	Biochimie
C. ROMAN	Physiologie animale
A. GILLET	Mathématiques
S. MARTINUZZI	Physique

MAITRES DE CONFERENCES

H. PATIN	Chimie
J. CRESP	Biologie animale
M. BENARROCHE	Physique

H. TACHOIRE	Chimie
E. VINCENT	Chimie
L. VICENTE	Biologie animale
J. MANUCEAU	Mathématiques
R. GUERMEUR	Physique
M. DELAAGE	Biochimie
F. CATZIGRAS (Mlle)	Géologie
M. SIRUGUE (Mme)	Physique
H. MERDY	Physique
L. PUJOL	Chimie
A. LAVAGNE	Biologie végétale
J. GIUDICELLI	Biologie animale
M. FOUGEREAU	Biochimie
G. NOAT	Physiologie végétale
R. BOUDET	Mathématiques
R. STREIFF	Chimie
JP. BELAICH	Microbiologie
P. NEVILLE	Biologie végétale
JP. SOUBLIN	Mathématiques
S. DELACHE (Mme)	Mathématiques
C. FARDOUX	Chargé d'enseignement - Mathématiques
B. MORIN	Chargé d'enseignement - Mathématiques
B. BALLET	Chargé d'enseignement - Mathématiques (Avignon)

Je dédie ce travail à Monsieur Théodore Vogel, Directeur du Centre de Recherches Physiques à Marseille qui a su m'aider de ses conseils et me redonner confiance chaque fois qu'il était nécessaire.

Je remercie Monsieur Jullien. Il m'a gentiment accueilli dans son laboratoire laissant souvent libre cours à mes initiatives mais les contrôlant heureusement.

Je remercie Monsieur Sidériades mon ancien professeur. Malgré ses occupations il s'est intéressé à mon travail et a bien voulu accepter la présidence du Jury.

Que Monsieur Geymonat trouve ici l'expression de ma profonde gratitude. L'aide précieuse qu'il m'a apportée m'a permis de mener à bien la partie théorique de cette thèse.

Que Madame Delache soit aussi remerciée. Elle a accepté de juger mon travail en ce qui concerne l'étude mathématique, répondant favorablement chaque fois que je faisais appel à son aide. J'ai pu, grâce à son appui, achever le traitement numérique au centre de calcul de l'Observatoire de Nice. Je remercie toute l'équipe de ce Centre.

Je remercie par la même occasion le laboratoire d'élasticité et le secrétariat du Centre de Recherches Physiques pour l'aide technique qu'ils m'ont apportée.

°°°

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I : Equations linéaires de la thermoélasticité couplée.

Le couplage thermoélastique 3

1.- Etablissement des équations 4

2.- Couplage thermoélastique 12

CHAPITRE II : La méthode 13

I.- Schémas dans l'espace des fonctions continues 15

CHAPITRE III : Thermoélasticité couplée dans l'espace des fonctions continues 22

I.- Problème différentiel 24

II.- Problème aux différences finies 28

III.- Résultats numériques obtenus. Interprétation physique 37

IV.- Utilisation des conditions de stabilité 60

V.- Existence d'une solution du système d'équation aux dérivées partielles suivant dans l'espace des fonctions continues 62

CHAPITRE IV. 73

I.- Rappels 75

II.- Applications aux équations de la thermoélasticité couplée 78

CONCLUSION GENERALE 88

ANNEXE.

Expressions des conditions aux limites mécaniquesen différences finies 91

BIBLIOGRAPHIE 95

°°°
°

INTRODUCTION

C'est en 1838 que Duhamel a étudié pour la première fois l'influence d'un gradient de température sur un matériau élastique. Cette branche de la physique porte le nom de thermoélasticité et a connu un développement important surtout depuis l'avènement de l'aéronautique.

Les déformations thermoélastiques, idéales à cause de leur linéarité, donnent quand même une approximation suffisante du phénomène réel. Leurs lois sont régies par un système de deux équations aux dérivées partielles couplées dont l'une est vectorielle à partie hyperbolique et l'autre scalaire à partie parabolique.

De nombreux travaux donnent des résolutions numériques pour des formes simplifiées de ces systèmes notamment lorsque le couplage ou l'inertie sont supprimés.

Nous avons choisi les différences finies pour étudier et résoudre des problèmes thermoélastiques les plus généraux possible.

L'intérêt théorique de cette méthode est non négligeable. En effet, si elle fournit des résultats numériques, elle permet aussi de préciser dans quels cas le problème mathématique est "bien posé" c'est-à-dire admet une solution unique.

Partant des travaux de Von Neumann, Johns, Lions et Raviart, nous avons distingué dans notre travail deux parties suivant la nature mathématique des données, en particulier des conditions aux limites.

Dans la première nous considérons le cas où elles appartiennent à l'espace des fonctions continues. Nous voyons comment, suivant le schéma d'approximation choisi, le problème se trouve bien ou mal posé. Pour cela nous discrétisons les équations de manière convenable, nous montrons ensuite à quelles relations doivent satisfaire les pas pour obtenir la stabilité numérique et la convergence des solutions approchées vers la solution exacte. Nous déduisons de cette étude, un théorème d'existence dans l'espace des fonctions continues pour le problème à une dimension.

Nous donnons ensuite la résolution numérique des équations thermoélastiques couplées à deux dimensions pour des conditions aux limites de forme générale. Nous appliquons ces résultats à un problème où toutes les données sont régulières. Il s'agit de déterminer les variations de température, les contraintes et les déformations planes dans une plaque de forme rectangulaire, sans épaisseur, parfaitement élastique soumise à des conditions aux limites thermiques et mécaniques d'allure suffisamment générale pour permett l'étude de divers cas particuliers.

Nous montrons ainsi sur des exemples, l'action des conditions aux limites sur l'influence du terme de couplage sur les solutions obtenues. Nous comparons nos conclusions à celles déjà obtenues [1], [7], [8], [9].

Dans la deuxième partie nous nous intéressons à des conditions aux limites d'un genre moins restrictif car elles appartiennent à un espace de module carré sommable. Entreront dans ce cadre les applications de température ou de gradient, brusques ou en échelon.

Adaptant la formulation variationnelle, nous appliquons le théorème des projections critère d'existence de la théorie hilbertienne et nous montrons qu'ici encore les problèmes généraux de la thermoélasticité linéaire couplée sont bien posés.

En conclusion nous voyons qu'il est possible d'aborder les problèmes thermoélastiques sous leur forme la plus complète. La méthode des différences finies a été efficace dans ce cas.

°°°

CHAPITRE I

EQUATIONS LINEAIRES DE LA THERMOELASTICITE COUPLEE

LE COUPLAGE THERMOELASTIQUE

1.- ETABLISSEMENT DES EQUATIONS.

Ces équations donnent le comportement d'un milieu solide parfaitement élastique sous l'action combinée de charges extérieures et de la température. Pour les établir, il faut donc considérer des phénomènes mécaniques qui permettent d'écrire les équations d'équilibre et des phénomènes thermiques qui introduisent des notions telles que énergie interne, entropie et température absolue. Nous précisons tout d'abord que ce qui suit n'est valable que pour de petites déformations et pour de petites variations de température à partir de l'état initial de façon à rester dans le domaine linéarisé.

a.- Rappel des équations d'équilibre pour un milieu continu soumis à des forces extérieures ; cas dynamique.

Soit un corps formé d'un matérieur déformable occupant l'espace D de frontière B. Chaque particule de D est définie par sa position au point P de coordonnées x_i (en pratique i = 1, 2, 3). Au temps t, P aura subi un déplacement de composantes $u_i(x_1, x_2, \ldots ; t)$.

Notons e_{ij} le tenseur déformation, nous aurons :

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left[u_{i,j} + u_{j,i}\right] \qquad \text{avec } u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

e_{ij} est un tenseur symétique.

Voyons quelles sont les forces qui agissent sur chaque élément de volume de D assimilé à chaque particule élémentaire :

- Il y a d'abord les forces extérieures F_i ,
- Celles-ci se traduisent sur chaque élément de volume de D par un champ de forces défini sur une surface Σ et ayant une certaine densité superficielle σ_{ij} telle que la force de contact s'écrira :

$$S_i = \sigma_{ij}\, n_j$$

σ_{ij} est le tenseur contrainte,
n_j la normale à Σ dirigée vers l'extérieur.

- Dans le cas dynamique viennent s'ajouter les forces d'inertie.

En vertu du principe de superposition, tout ceci, valable pour chaque élément de D, est valable pour D tout entier.

A l'équilibre nous écrirons que la somme des forces appliquées à D est nulle, ce qui donne :

$$\int_D F_i \, dV - \int_D \rho \ddot{u}_i \, dV + \int_B \sigma_{ij} n_j \, dA = 0$$

Les points désignent des dérivées par rapport au temps, $\rho(x)$ est la densité de masse du matériau.

En appliquant le théorème de la divergence et sous réserve que l'intégrant soit continu on obtient l'équation d'équilibre :

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \qquad (1)$$

En appliquant aussi le théorème de la divergence à l'équation des moments, on peut démontrer que le tenseur des contraintes est symétrique.

Il est maintenant nécessaire de déterminer la forme de σ_{ij} afin de donner les caractéristiques du matériau. Par exemple dans le cas de l'élasticité, la loi de Hooke posera la proportionnalité entre les σ_{ij} et les e_{ij}. En thermo-élasticité, nous montrerons qu'à ce terme s'ajoutera un terme analogue où interviendra une caractéristique thermique du matériau, (en l'occurence la température).

Puisque l'on introduit D dans un champ de température, il faut donc considérer le problème non plus seulement comme un système mécanique mais comme un système thermique.

Avant cela, nous allons donner quelques éléments de thermodynamique indispensables.

b.- Eléments de thermodynamique.

- L'état d'un système thermodynamique est connu si les valeurs numériques de plusieurs quantités appelées "variables d'état" et dont chacune décrit une propriété différente du système sont connues. Parmi ces quantités nous définirons les "extensives" ou additives par exemple le volume ou l'énergie interne et les "intensives" telles la densité de masse ou la pression.

- Nous considérons les systèmes "uniformes" c'est-à-dire ceux pour lesquels les variables d'état intensives ne varient pas dans l'espace et les systèmes "non uniformes".

- Un système est dit "en équilibre thermodynamique", si les variables d'état qui les caractérisent n'évoluent pas avec le temps.

- Définissons une variable d'état particulière : la température Θ :

Lorsque deux ou plusieurs systèmes en équilibre thermodynamique sont mis en contact les uns avec les autres, s'ils restent en équilibre thermodynamique, alors ils sont dits "en équilibre thermique", et il existe une fonction qui caractérise chacun des systèmes f_1 , f_2, ... et telle que $f_1 = f_2 = \ldots = f_i$ à l'équilibre thermique. C'est Θ qui est choisie arbitrairement ; c'est ainsi qu'on définit les échelles de température.

- On montre expérimentalement qu'à l'équilibre thermodynamique, si les valeurs d'un certain nombre de variables d'état ont été déterminées les autres sont fixées. Par exemple si un système possède (m + n) variables d'état et s'il existe m relations fonctionnelles entre ces variables, alors les n autres peuvent être prises comme indépendantes. Ses relations constituent les "équations d'état". En particulier si un système est caractérisé par sa température et sa déformation, l'expression des contraintes en fonction de ces deux variables choisies comme indépendantes, contitue une équation d'état.

- Energie interne d'un système uniforme : U.

C'est une variable d'état extensive définie comme étant le travail nécessaire pour amener ce système d'un état d'équilibre thermodynamique correspondant aux variables d'état à l'instant t_o à un état d'équilibre thermodynamique correspondant à ces mêmes variables à l'instant t_1, au moyen d'un processus adiabatique c'est-à-dire sans échange de chaleur avec l'extérieur. L'expérience montre que ce travail est indépendant du processus adiabatique utilisé, il ne dépend que des états initial et final.

Pour les systèmes non uniformes, on postule l'existence d'une "densité d'énergie interne" obtenue en divisant l'énergie interne totale par la masse du système. C'est une variable d'état intensive.

- Processus réversibles.

Quand un système évolue en fonction du temps nous dirons que la transformation qu'il subit est réversible lorsqu'à chaque instant de son évolution, l'état du système peut être défini par des valeurs bien déterminées des variables d'état, ces valeurs restant infiniment voisines de celles qui correspondent à un état d'équilibre thermodynamique. Dans le mot réversible il y a idée de retour.

Nous pouvons dire plus simplement qu'une transformation réversible est la limite commune de deux transformations réalisables en sens inverse. Dans la réalité il n'existe que des transformations irréversibles. La conduction de la chaleur en est un.

Pour les processus réversibles, le théorème de Caratheodory permet de définir deux variables d'état : l'entropie S et la température absolue T, $\frac{1}{T}$ est le facteur intégrant qui transforme la forme différentielle dQ correspondant à la quantité de chaleur mise en jeu lorsqu'elle ne dépend que de deux variable indépendantes en une différentielle totale suivant la relation :

$$(2) \qquad dS = \frac{1}{T}\, dQ$$

Pour les transformations irréversibles, (2) est remplacée par l'inégalité de Clausius-Duheim :

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\int_D S\,dV \geq -\int_B \frac{q_i n_i}{T}\, dA$$

où q_i est tel que : $Q = q_i n_i$. Les n_i désignent les composantes de la normale extérieure. C'est cette dernière que nous utiliserons.

c.- Conservation de l'énergie pour un système non uniforme.

Nous postulons que la loi de conservation de l'énergie valable pour les systèmes uniformes, l'est encore pour les systèmes non uniformes.

Plaçons le corps D de frontière B dans un champs de température. Soient $e(x,t)$ sa densité d'énergie interne ; Q la quantité de chaleur passant dans D à travers B ; $v_i(x,t)$ les composantes de la vitesse de la particule au point P à l'instant t ; $F_i(x,t)$ les forces de volume.

Les énergies mises en présence sont :

- l'énergie cinétique $\mathcal{K} = \frac{1}{2}\int_D \rho v_i v_i dV$.
- l'énergie interne : $U = \int_D \rho \varepsilon dV$.
- l'énergie de déformation par unité de temps : $\int_B \sigma_{ij}\, n_j\, v_i\, dA$.
- l'énergie correspondant au transfert de chaleur par unité de temps $\int_B q_i n_i dA$.
- l'énergie due aux forces de masse : $\int_D F_i v_i dV$ par unité de temps.

La loi de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\int_B \sigma_{ij} n_j v_i dA + \int_D F_i v_i dV - \int_B - q_i n_i dA = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_D \rho v_i v_i dV + \int_D \rho \varepsilon dV\right]$$

En appliquant le théorème de la divergence aux intégrales définies sur B et en tenant compte de (1) nous obtenons :

$$\int_D (\rho \dot{\varepsilon} - \sigma_{ij} v_{i,j} + q_{i,i}) dV = 0$$

soit sous réserve que l'intégrant soit continu :

$$\sigma_{ij}\, \dot{u}_{i,j} - q_{i,i} = \rho \dot{\varepsilon} \tag{4}$$

A l'expression classique de l'énergie de déformation pour un matériau élastique s'ajoute $q_{i,i}$ qui représente en quelque sorte l'énergie calorifique.

d. - Relation contrainte-déformation-température pour un solide élastique.

Pour un matériau élastique, on choisit $u_{i,j}$ et T comme variables indépendantes. σ_{ij} devient alors fonction de ces deux quantités. Il en est de même pour la densité d'énergie interne et la quantité de chaleur mise en jeu.

Le théorème de la divergence appliqué à (3) donne :

$$T\rho\dot{\eta} \geq - q_{i,i} + q_i \frac{T_{,i}}{T} \tag{5}$$

ou $\eta\rho = S$

η est la densité d'entropie.

Eliminons $q_{i,i}$ entre (4) et (5), on obtient :

$$(6) \qquad \rho[\dot{\varepsilon} - T\dot{\eta}] \leq \sigma_{ij}\,\dot{u}_{i,j} - q_i \frac{T_{,i}}{T}$$

Introduisons maintenant $\varphi = \varepsilon - T\eta$ appelé fonction "énergie libre d'Helmholtz" φ ne dépend aussi que de $u_{i,j}$ et de T, on peut donc écrire :

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_{i,j}}\,\dot{u}_{i,j} + \frac{\partial \varphi}{\partial T}\,\dot{T}$$

En portant dans (4) et dans (6) nous obtenons les deux relations suivantes :

$$(7) \qquad (\rho \frac{\partial \varphi}{\partial u_{i,j}} - \sigma_{ij})\dot{u}_{i,j} + \rho(\frac{\partial \varphi}{\partial T} + \eta)\dot{T} + \rho\, T\,\dot{\eta} + q_{i,i} = 0$$

$$(8) \qquad (\rho \frac{\partial \varphi}{\partial u_{i,j}} - \sigma_{ij})\,\dot{u}_{i,j} + \rho(\eta + \frac{\partial \varphi}{\partial T})\dot{T} + q_i \frac{T_{,i}}{T} \leq 0$$

de (7) et (8) on peut tirer :

$$(9) \qquad \sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial u_{i,j}}$$

$$(10) \qquad \eta = - \frac{\partial \varphi}{\partial T}$$

$$q_{i,i} = \rho\, T\dot{\eta}$$

$$q_i T_{,i} \leq 0$$

Développons $\varphi(u_{i,j}\,;\,T)$ en série de Taylor au point de référence $(0, T_o)$, nous obtenons :

$$\varphi(u_{i,j}\,;\,T) - \varphi(0, T_o) = \frac{1}{\rho} A_{ij} u_{i,j} + (T - T_o)\frac{\partial \varphi}{\partial T} + \frac{1}{2\rho} B_{ijk\ell} u_{i,j} u_{k,\ell}$$
$$+ \frac{1}{\rho} C_{ij} u_{i,j}(T - T_o) + \frac{1}{2}(T - T_o)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} + \ldots$$

(9) donne alors :

$$\sigma_{ij} = A_{ij} + B_{ijk\ell}\, u_{k,\ell} + C_{ij}(T - T_o)$$

Si on suppose qu'à des contraintes nulles correspondent des déformations nulles (hypothèse d'élasticité) alors on aura $A_{ij} = 0$

C_{ij} est négatif posons $C_{ij} = - \beta_{ij}$.

$B_{ijk\ell}$ est le tenseur d'élasticité. β_{ij} et $B_{ijk\ell}$ admettent certaines symétries car $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. De plus pour un matériau homogène et isotrope les composantes de ces tenseurs du 2ème et du 4ème ordre se réduit à des combinaisons linéaires des coefficients de Lamé λ et μ, du coefficient de dilatation thermique α et du symbole de Kronecker δ_{ij} qui vaut 0 ou 1 suivant que i et j sont différents ou identiques.

Nous pouvons alors écrire l'expression générale des contraintes dans la théorie linéarisée

$$(11) \qquad \sigma_{ij} = B_{ijk\ell}(x)\, u_{k,\ell} - \beta_{ij}(x)(T - T_o)$$

e.- Equations.

La loi de conduction de la chaleur donne pour un matériau non homogène et anisotrope.

$$(12) \qquad - q_{i,i} = (K_{ij}(x)\, T_{,j}),\ i.$$

$K_{ij}(x)$ est la conductibilité thermique. Or :

$$q_{i,i} = - \rho\, T\dot{\eta} = \rho T \left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial T}\right) \quad \text{d'après (10)}$$

Comme pour de petites variations de température $T \# T_o$ on a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T}(T) = \frac{\partial \varphi}{\partial T}(T_o) - \frac{1}{\rho}\, \beta_{ij}\, u_{i,j}$$

On obtient donc :

$$(K_{ij}(x)\, T_{,j})_{,i} = T_o\, \beta_{ij}(x)\, \dot{u}_{ij} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2}\, T_o\, \rho\, \dot{T}$$

Posons :

$$C_E(x) = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2}\, T_o$$

c'est la chaleur spécifique du solide mesurée à déformation constante. Portons (11) dans (1), on trouve alors le système I des équations couplées de la thermoélasticité :

$$\begin{cases} (13) & \rho \ddot{u}_i - (B_{ijk\ell}\, u_{k,\ell})_{,j} + (\beta_{ij}(T - T_o)_{,j} = \mathfrak{F}_i \\ (14) & \rho C_E \dot{T} - T_o \beta_{ij} \dot{u}_{i,j} - (K_{ij}\, T_{,j})_{,i} = \Omega \end{cases}$$

$$\mathfrak{F}_i = F_i + \beta_{ij,j}\, T_o$$

Ω sources de chaleur éventuelles.

2.- COUPLAGE THERMOELASTIQUE.

En considérant (14), on constate qu'il s'agit de l'équation de la chaleur à laquelle s'ajoute $\beta_{ij} T_o \frac{\partial}{\partial t} u_{i,j}$. Ce terme "couple" les équations (13) et (14). Boley et Weiner [1] ont calculé $\beta_{ij} T_o$ pour certains matériaux homogènes, isotropes à des températures de référence moyennes. Leur valeur est en général suffisamment petite, pour justifier soit l'utilisation de techniques de résolution s'apparentant aux méthodes de perturbation [9], soit son absence, même dans la plupart des problèmes thermoélastiques. En effet, l'étude mathématique du système I complet, présente de très grandes difficultés. De plus, l'expérience montre que l'influence du couplage est pratiquement nulle pour de nombreux problèmes. Donc une des simplifications les plus usitées, consiste à négliger ce terme et constitue la "thermoélasticité non couplée.

Dans l'introduction de sa thèse [9] Lefkowitz rend compte des conclusions de Boley, Weiner et Tolis sur la signification et l'importance du couplage thermoélastique. Il range ainsi les problèmes traités en thermoélasticité en cinq classes suivant des difficultés de résolution croissantes et donne pour chacune un aperçu des travaux s'y rapportant.

Dans le présent travail, nous montrons deux exemples, le premier pour lequel les problèmes couplés et non couplés donnent des résultats analogues, le second pour lequel le couplage met en évidence des faits nouveaux.

CHAPITRE II

LA METHODE

Nous avons choisi les différences finies pour étudier et résoudre les équations de la thermoélasticité couplée. Cette méthode de discrétisation s'applique à tout problème différentiel. Elle permet de construire des suites de solutions (numériques) approchées qui tendent à la limite vers la solution exacte du problème. Courant, Friedrichs, Lewy utilisent cet outil pour démontrer l'existence et l'unicité des solutions de certaines équations aux dérivées partielles dans l'espace des fonctions continues et admettant des dérivées continues jusqu'à un ordre convenable. Pour cela ils déterminaient des conditions sur le choix des pas de manière à satisfaire leurs fameuses inégalités énergétiques assurant ainsi la stabilité et la convergence du schéma choisi. A leur suite, Von Neumann donne un critère pratique pour l'étude de la stabilité des schémas aux différences finies. Il retrouve les résultats des précédents concernant notamment des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique et parabolique. On peut alors pour des schémas stables donner des résolutions numériques satisfaisantes en programmant les systèmes linéaires obtenus sur calculateur.

Si toutefois le problème différentiel n'admet qu'une solution généralisée, il est encore possible d'appliquer la méthode des différences finies, cette fois sous forme variationnelle. La généralisation des inégalités énergétiques (inégalités "a priori" de Lions et Raviart) avec des normes appropriées permet ici encore de déterminer des conditions de stabilité pour les schémas de discrétisation choisis.

I.- SCHEMAS DANS L'ESPACE DES FONCTIONS CONTINUES.

1.- Le principe des différences finies est le suivant :

On recouvre le domaine de valeurs de la fonction inconnue d'un réseau de forme et de pas déterminés. Pour un noeud quelconque de ce réseau, on remplace chaque dérivée du système différentiel par des expressions approchées faisant intervenir des différences entre les valeurs de l'inconnue aux noeuds voisins convenablement divisées par les pas. Pour obtenir ces différences, on approche la fonction inconnue à condition qu'elle soit continuement différentiable jusqu'à un certain ordre par un polynôme d'interpolation d'ordre n. Ce polynôme est choisi d'après les lois d'interpolation de Newton, Newton-Gauss, Stirling, Bessel suivant le réseau et les valeurs de la variable pour lesquelles l'inconnue est intéressante. Les dérivées sont calculées sur ce polynôme et on ne retient pour approcher le système différentiel que quelques uns des premiers termes suivant la précision voulue. Les autres termes sont groupés en un "reste" qui s'annule lorsque le pas du réseau tend vers 0 et qui contient les bornes supérieures de certaines des dérivées sur l'intervalle de définition. Le calcul de ce reste est basé sur la forme Lagrangienne du polynôme d'interpolation par ailleurs peu pratique quant à son exploitation numérique.

Exemple d'un schéma centré :
Soit : $y = f(x)$, $x \in [0, b]$ b donné, si l'on divise $[0, b]$ en un réseau de pas constant h : ... a - ph ... a - h, a, a + h ... a + ph ... $a \in [0, b]$ p entier, la formule de Stirling donne plusieurs types d'approximation pour

$$\frac{df(x)}{dx} = y'(x)$$

- une très simple est utilisée dans la formulation "ordinaire" des différences finies, elle donne :

$$y'(a) = \frac{f[a + h] - f[a - h]}{2h}$$

avec un reste égal à $\frac{1}{6} \sup |y'''(x)|_{[a - h,\ a + h]}$ (ce qui représente le $\frac{1}{6}$ de la borne supérieure de la dérivée troisième de y par rapport à x dans l'intervalle fermé $[a - h , a + h]$.

- une autre plus élaborée donne :

$$y'(a) = \frac{1}{12h} [- f[a + 2h] - 8f[a + h] - 8f[a - h] + f[a - 2h]]$$

avec un reste égal à : $\frac{1}{30} \sup |y^{IV}(x)|_{[a - 2h\ ,\ a + 2h]}$

Lorsque le pas du réseau n'est pas constant, il convient d'utiliser la formule d'interpolation de Newton [12].

Il existe une forme d'approximation plus précise quoique d'utilisation plus complexe, elle est basée sur les polynômes d'interpolation d'Hermite. Ils donnent des combinaisons linéaires entre la fonction et ses k premières dérivées (si k est l'ordre du système différentiel à étudier) aux noeuds du réseau. En écrivant l'équation différentielle en ces mêmes noeuds on peut alors déterminer les valeurs de l'inconnue et de ses k dérivées aux noeuds choisis. Kantorowich et Krilov, Collatz donnent dans leurs ouvrages [12] [13] une étude complète de ces méthodes, des tables comportant les dérivées d'une fonction sous forme de différences avec les reste correspondants. Nous ne nous y étendrons pas davantage mais nous préciserons que dans ce qui suit, seules des différences "ordinaires" avec pas constant seront utilisées.

Nous distinguerons néanmoins plusieurs possibilités suivant que nous remplacerons les dérivées en un noeud (i) par les différences de l'inconnue en des noeuds situés à droite, à gauche de (i) ou centrés sur (i). Ceci permet d'écrire divers schémas "simples" pour une même équation suivant des formulations dites explicites ou bien implicites.

2. - Stabilité - convergence.

Lorsqu'on applique les différences finies à des équations ou à des systèmes d'équations différentielles, il est évident que plus le réseau devient serré, c'est-à-dire plus le pas devient petit, plus le problème aux différences tend vers le problème exact assurant ainsi la convergence de la méthode. Quand il s'agit d'équations aux dérivées partielles, plusieurs pas sont en jeu, dans ce cas pour obtenir la convergence et la stabilité du schéma, il est nécessaire que les pas satisfassent à certaines inégalités. Avant de donner le critère pratique qui permet de déterminer ces inégalités, nous rappellerons quelques définitions [3]

Appelons d la solution exacte du problème différentiel.

δ la solution exacte du problème aux différences finies .

N la solution numérique effectivement calculée.

Trouver les conditions pour que δ tende vers d constitue le problème de la convergence.

Trouver les conditions pour que $|\delta - N|$ soit petit c'est-à-dire comparable à une erreur préfixée constitue le problème de la stabilité du schéma.

Dans leur article [19] concernant les équations aux dérivées partielles hyperboliques, Courant-Friedrichs-Lewoy remarquaient qu'un schéma de discrétisation correspondant à ces équations ne peut pas être convergent si le rapport des pas en temps et en espace est trop grand. Dans le cas contraire, le domaine de définition pour le schéma aux différences, ne contient pas tous les points de son domaine de définition pour l'équation différentielle. Un tel schéma ignore donc des informations qui peuvent influer notablement sur les solutions. Il est donc nécessaire de se limiter dans le choix des pas. Ces auteurs utilisaient pour cela des inégalités énergétiques analogues à celles que prenait Euler dans le calcul des variations. Par exemple ils trouvent que pour l'équation des ondes dans un milieu à une dimension $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ doit être au plus égal à $\frac{1}{C}$, C étant la vitesse du son dans le milieu. En ce qui concerne l'étude de la stabilité d'un schéma aux différences finies, Von Neumann propose une méthode pratique que nous utiliserons par la suite. Elle donne confirmation des conclusions de [19].

3.- Méthode de Von Neumann.

Il considère des "phase de calcul". Ce sont les étapes durant lesquelles on calcule les solutions du système aux différences finies en tous les noeuds du réseau correspondant à un temps τ fixé :

$\tau = 0 \rightarrow$ phase 0
$\tau = 1 \rightarrow$ phase 1 ...

Au cours d'une phase de calcul, les erreurs s'accumulent de noeud en noeud. Au bout de la phase, l'erreur sera maximale. Lorsqu'on passe d'une phase à une autre, on regarde le comportement de cette erreur maximale :

- Si elle est croissante, nous dirons qu'il y a "instabilité forte".
- Si elle est décroissante nous dirons qu'il y a "stabilité forte".

Seule cette erreur arrondie est intéressante à étudier, pourtant en pratique, il est plus facile d'examiner le comportement de l'erreur en un noeud quelconque du réseau, c'est ce qui correspond à la stabilité ou instabilité dite "faible". A la base de cette étude, il faut faire l'hypothèse suivante :

(I) stabilité ou instabilité faible $\Rightarrow$ stabilité ou instabilité forte

Le système aux différences finies peut s'écrire :

$$S[\delta[m ; n]] = F[m ; n]$$

(c'est le système approché que l'on résout effectivement).

$$\delta[m ; n] = \delta(x ; t) \quad x = mh \quad t = n\ell$$

m, n entiers.

$F[m ; n]$ est le second membre donné et discrétisé.

Posons :

$$\epsilon[m ; n] = \delta[m ; n] - N[m ; n]$$

Pour des systèmes linéaires, les seuls que nous considérerons par la suite, $\epsilon[m ; n]$ satisfera à l'équation suivante :

$$S[\epsilon[m ; n]] = 0$$

Von Neumann pose l'erreur au bout d'une phase de calcul sous la forme :

$$\epsilon_n = \sum_m \xi_n e^{j\beta mh} \quad \text{à la } n^{\text{ième}} \text{ phase}$$

β réel, ξ_n complexe, $j^2 = -1$

avec autant de termes dans la série que de noeuds dans la phase considérée.

L'hypothèse (I) permet de ne travailler qu'en un seul noeud donc nous n'utiliserons qu'un seul terme de la série, le $m^{\text{ième}}$ par exemple et l'on aura :

$$\epsilon[m ; n] = \xi_n e^{j\beta h}$$

Ainsi il y aura "stabilité" si et seulement si :

$$|\xi_n| \leq 1$$

de plus, Von Neumann pose $\xi_n = e^{\alpha n\ell}$ α complexe $\Rightarrow \xi_n = \xi^n$ où $\xi = e^{\alpha\ell}$ donc la condition de stabilité s'écrit : $|\xi| \leq 1$.

Nous allons montrer que pour les problèmes linéaires et sous certaines conditions lorsque les conditions de stabilité sont satisfaites, la convergence est assurée.

4. - Utilisation des conditions de stabilité :

$$|\xi| \leq 1 \Rightarrow |\epsilon[m ; n]| \leq |\epsilon[m ; 0]|$$

où $|a|$ représente la valeur absolue de a.

Notons $\delta_T[m ; n]$ la partie transitoire de $\delta[m ; n]$ on aura :

$$|\delta_T[m ; n]| \leq |\delta_T[m ; 0]|$$

En effet ϵ se comporte par rapport au temps comme la partie transitoire de δ. $\delta_T[m ; 0]$ correspond à la condition initiale pour le système aux différences finies homogène.

Si l'on utilise la norme de la convergence uniforme

$$\|\delta[m ; n]\| = \frac{\sup |\delta[m ; n]|}{\substack{n\ell \\ mh \leq 1 \\ n\ell \in [0, T]}}$$

$$\|\delta[m ; n]\| \leq \|\delta_T[m ; 0]\| + T \| \delta_p[m ; n]\|$$

où $\delta_p[m ; n]$ est une solution particulière pour le deuxième membre de l'équation aux différences finies.

Ayant constitué un réseau stable avec les pas h et ℓ, il s'agit de démontrer que $\delta \to d$ lorsque $h \to 0$ et $\ell \to 0$ à condition bien entendu que le problème différentiel soit bien posé, c'est-à-dire que d existe dans l'espace où on a défini la norme $\| \quad \|$.

Théorème.

Soit d(x ; t) la solution du système aux dérivées partielles linéaire d'ordre q en x et q' en t

(I) $\quad S[d(x ; t)] = F(x ; t)$

où F(x ; t) est un second membre donné et continu en x et en t.

Sous les hypothèses suivantes :

- d(x ; t) est unique,
- d(x ; t) est uniformément continue à valeurs réelles,
- d(x ; t) est de classe C^q par rapport à x,
- d(x ; t) est de classe $C^{q'}$ par rapport à t.

Soit $\delta[m ; n]$ la solution du système aux différences finies (II) associé au système différentiel pour un schéma de discrétisation stable

(II) $\quad \Sigma[\delta[m ; n] + \mathcal{R}[m ; n] = F[m ; n]$

où $mh = x$; $n\ell = t$; h et ℓ vérifiant les conditions de stabilité. $\mathcal{R}[m ; n]$ reste, infiniment petit en h et ℓ.

Alors quelque soit $\eta > 0$ aussi petit qu'on veut, il existe $\omega(\eta)$ et $\omega'(\eta)$ tels que :

$$0 < h \leq \omega(\eta)$$

$$\Longrightarrow \| d(x ; t) - \delta[m ; n] \| \leq \eta$$

$$0 < \ell \leq \omega'(\eta)$$

où $\| \quad \|$ est la norme de la convergence uniforme.

Démonstration.

Ecrivons II sous la forme :

$$\delta[m ; n]\, f(h, \ell) = \Sigma'[\delta[m ; n]] + R[m ; n] - F[m ; n]$$

en isolant l'expression où figure δ.

Appliquons l'opérateur du 2ème membre à $d(x ; t)$ satisfaisant aux hypothèses du théorème, on obtient :

III) $\quad \Sigma'[d[m ; n]] + R[m ; n] - F[m ; n]$

donnons $\Sigma'[d[m ; n]$ en fonction de $d[m ; n]$ et de ses dérivées successives par utilisation des expressions différentielles sous forme de différences, on trouve alors :

$$III = f(h, \ell)\ d[m ; n] + R'[m ; n] + S[d[m ; n]] - F[m ; n]\, R[m, n]$$

où $R'[m ; n]$ est une expression qui tend vers 0 lorsque h et ℓ tendent vers 0. Soit en revenant à $\Sigma[d[m ; n]]$ et en tenant compte de I :

IV $\quad \Sigma[d[m ; n]] = R'[m ; n] + F[m ; n]$

Faisons IV - I, comme le système est linéaire il vient :

V $\quad \Sigma[W[m ; n] = R'[m ; n] - R[m ; n] = R''[m ; n]$

avec $W[m ; n] = d[m ; n] - \delta[m ; n]$
et : $W[m ; 0] = 0$.

V est identique à II donc les conditions de stabilité donnent avec la norme de la convergence uniforme :

$$\|W[m ; n]\| \leq \mathcal{C}\|R''[m ; n]\|$$

$\mathcal{C}$ est une constante.

Comme $R''[m ; n]$ tend vers 0 avec h et ℓ, il en est de même pour $W[m ; n]$.

Remarque :

Lorsque $x = x_1 , x_2 \ldots x_r$ on prend $h = \inf_{1 \leq i \leq r} h_i$

5.- Résolution numérique.

Les système algébriques à résoudre sont d'ordre d'autant plus élevé que les pas deviennent petits. Nous avons donc intérêt à utiliser des procédés itératifs dont la programmation sur tableau plus compact que les matrices de résolution, s'avère facile.

Le problème de la convergence de ces méthodes se pose alors. Dans le chapitre III nous en précisons les conditions d'application par la vérification d'un critère donné par Collatz [13].

CHAPITRE III

THERMOELASTICITE COUPLEE DANS L'ESPACE

DES FONCTIONS CONTINUES

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux équations de la thermo-élasticité couplée donnant les composantes du déplacement ainsi que les variations de température pour un matériau parfaitement élastique, homogène, isotrope, dans le cas dynamique. Nous en déduisons la répartition des contraintes thermo-élastiques que nous donnons sous forme de courbes. Toutes les données, conditions aux limites comprises, sont choisies suffisamment régulières pour justifier une étude du problème dans l'espace des fonctions continues : $C_o(\Omega)$ ou Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n (n \leq 3)$.

Dans un premier temps, nous passons aux coordonnées réduites puis, nous discrétisons les équations suivant un schéma aux différences finies dont nous déterminons la stabilité par l'application du critère donné au chapitre II. Nous discrétisons ensuite les conditions aux limites et donnons une résolution numérique pour le cas où n = 2 (domaine rectangulaire) et diverses conditions aux bords. Le programme de résolution est suffisamment complet pour que la variation de certains paramètres permette d'étudier l'influence du couplage en thermoélasticité.

En second lieu on adapte plus particulièrement ce problème à celui de l'échauffement d'une plaque de cuivre et on compare nos résultats et ceux de l'expérience.

Enfin nous donnons un résultat de convergence pour n = 1 et en déduisons un théorème d'existence dans $C_o(\Omega)$.

I.- PROBLEME DIFFERENTIEL.

1.- Equations réelles.

Il s'agit donc de considérer les déformations longitudinales d'une plaque rectangulaire sans épaisseur soumise à l'action d'un champ de température.

Prenons les axes de coordonnées 0X et 0Y confondus avec le plan de la plaque

$0 \leq X \leq \ell$ où ℓ est sa largeur,

$0 \leq Y \leq L$ et L sa longueur.

si τ est le temps, notons $U(X, Y ; \tau)$ et $V(X, Y ; \tau)$ les composantes planes du déplacement élémentaire, $T(X, Y ; \tau)$ la variation de température de la plaque à partir de la température de référence notée T_o. Les équations donnant U, V, T s'écrivent :

$$I \quad \begin{cases} \mu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right) + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} - \alpha(3\lambda + 2\mu)\frac{\partial T}{\partial X} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \\ \mu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right) + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} - \alpha(3\lambda + 2\mu)\frac{\partial T}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} \\ K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}\right) = \rho C \frac{\partial T}{\partial \tau} + T_o \alpha(3\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial \tau} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial \tau}\right) \end{cases}$$

λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau,
α son coefficient de dilatation linéaire thermique,
ρ sa densité de masse,
C sa chaleur spécifique, à déformation constante,
K sa conductibilité calorifique.

Les conditions initiales seront :

$$U(X, Y ; 0) = V(X, Y ; 0) = T(X, Y ; 0) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}(X, Y ; 0) = \frac{\partial V}{\partial \tau}(X, Y ; 0) = 0$$

τ reste fini.

Les conditions aux limites sont de deux sortes :

Thermiques.

Sur chaque face du rectangle constituant la plaque, nous prenons une condition de la forme :

$$A^{(\alpha)}(X,\ Y\ ;\ \tau)\,T + B^{(\alpha)}(X,\ Y\ ;\ \tau)\,\frac{\partial T}{\partial n} = C^{(\alpha)}(X,\ Y\ ;\ \tau)$$

où $\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ donne le numéro de la face,

$A^{\alpha}(X,\ Y\ ;\ \tau)$, $B^{\alpha}(X,\ Y\ ;\ \tau)$, $C^{\alpha}(X,\ Y\ ;\ \tau)$ sont des fonctions continues de $X,\ Y,\ \tau$ (éventuellement constantes suivant une ou plusieurs de ces trois variables).

$\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée normale sur chaque face,

n la normale a son sens positif dirigé vers l'extérieur.

Nous remarquons que suivant les valeurs données à A^{α}, B^{α} et C^{α}, nous obtenons des conditions se ramenant soit à la connaissance de la température au bord, soit à celle d'un gradient de température, soit à la présence d'un rayonnement de la température avec le milieu extérieur.

Mécaniques.

Nous prenons aussi des conditions générales de type mixte (dans le sens où elles se présentent comme une combinaison linéaire de la fonction et de ses dérivées). Elles sont de la forme :

$$\Sigma_{ij}\ n_j^{(\alpha)} + A^{*(\alpha)}_{ij}\ u_j = C_i^{*(\alpha)} \qquad i, j = 1, 2$$

$u_1 = U$, $u_2 = V$.

$$\Sigma_{ij} = \delta_{ij}\ \lambda E_{kk} + 2\mu E_{ij} - \delta_{ij}(3\lambda + 2\mu)\alpha T$$

Σ_{ij} est le tenseur des contraintes

δ_{ij} le symbole de Kronecker $\begin{cases} = 0 \text{ si } i \neq j \\ = 1 \text{ si } i = j \end{cases}$

E_{ij} le tenseur déformation $= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

n_j les composantes de la normale extérieure.

2. - Problème réduit.

Pour simplifier la résolution numérique effective, nous utilisons les coordonnées réduites, en posant pour cela :

$u = C_\ell U$

$v = C_\ell V$

$t = C_\ell^2 \tau$ $\qquad C_\ell = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ est la vitesse des ondes longitudinales.

$x = C_\ell X$

$y = C_\ell Y$ $\qquad DX = C_\ell \ell \qquad DY = C_\ell L$

Nous obtenons le système II :

$$\text{II} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (b+d)\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a\dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} & (1) \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (b+d)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - a\dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} & (2) \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \dfrac{1}{K^*}\dfrac{\partial T}{\partial t} + g\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial t}\right) & (3) \end{cases}$$

où

$$a = \frac{\alpha(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \qquad g = \frac{\alpha T_o (3\lambda + 2\mu)}{K}$$

$$K^* = \frac{K}{\rho C_\ell} \qquad b = \frac{\mu}{\rho C_\ell^2} \qquad d = \frac{\lambda}{\rho C_\ell^2}$$

Les conditions initiales réduites seront :

$$u(x, y ; 0) = v(x, y ; 0) = T(x, y ; 0) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y ; 0) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, y ; 0) = 0$$

Les conditions aux limites réduites seront :

$$A^{(\alpha)}(x, y ; t)\, T + B^{(\alpha)}(x, y ; t)\frac{\partial T}{\partial n} = C^{(\alpha)}(x, y ; t)$$

et :

$$\sigma_{ij}\, n_j^{(\alpha)} + A_{ij}^{(\alpha)}\, u_j = C_i^{(\alpha)}$$

avec :

$$\sigma_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\lambda + 2\mu} \qquad A_{ij} = \frac{A_{ij}^*}{C_\ell(\lambda + 2\mu)} \qquad C_i = \frac{C_i^*}{\lambda + 2\mu}$$

II. - PROBLEME AUX DIFFERENCES FINIES.

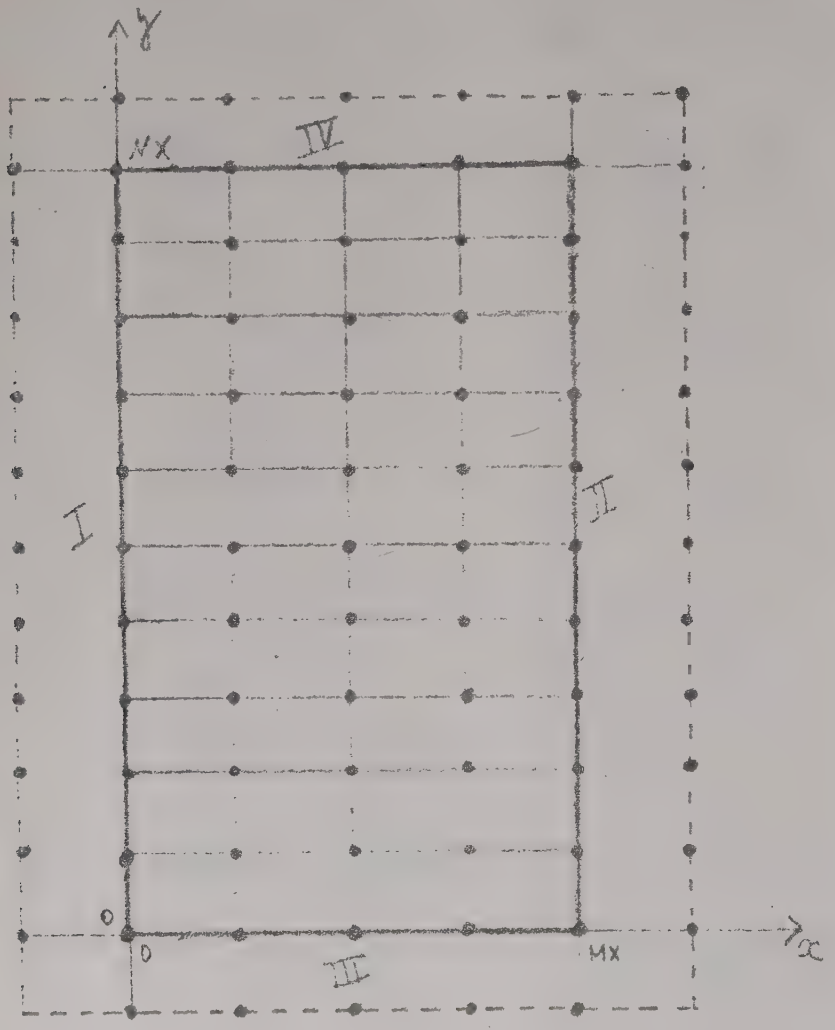
a) Schéma de discrétisation.

Découpons le côté 0, ℓ en MX + 1 segments égaux à h et 0, L en NX + 1 segments égaux à k.

$$h = \frac{\ell}{MX + 1} \qquad k = \frac{L}{NX + 1}$$

Choisissons un intervalle de temps fini : [0, t] et un découpage en temps de PX segments égaux chacun à $p\ell$: $t = PX \cdot p\ell$.

Discrétisons le système II suivant un schéma explicite pour les équations (1) et (2) et implicite pour l'équation (3). Nous obtenons le système aux différences finies III. Dans ce dernier : $f(mh, nk ; p\, p\ell)$ est noté $f_{m, n ; p}$:



La figure ci-contre donne un exemple de réseau rectangulaire pour un schéma à 5 points identique à celui utilisé ici. Les bords de la plaque sont en trait fort. Les points extérieurs sont répartis sur une ligne pointillée. Les faces sont numérotées

III

(1)
$$u_{m,n;p+1} = \frac{p\ell^2}{h^2} u_{m-1,\,n;p} + b\frac{p\ell^2}{k^2} u_{m,n-1;p} + 2\left(1 - \frac{p\ell^2}{h^2} - b\frac{p\ell^2}{k^2}\right)u_{m,n;p}$$
$$+ \frac{p\ell^2}{h^2} u_{m+1,n;p} + b\frac{p\ell^2}{k^2} u_{m,n+1;p} + (b+d)\frac{p\ell^2}{hk}\left[v_{m,n;p} - v_{m+1,n;p}\right.$$
$$\left. - v_{m,n+1;p} + v_{m+1,n+1;p}\right] + a\frac{p\ell^2}{h}\left[T_{m,n;p} - T_{m+1,n;p}\right] - u_{m,n;p-1}$$

(2)
$$v_{m,n;p+1} = \frac{p\ell^2}{k^2} v_{m,n-1;p} + b\frac{p\ell^2}{h^2} v_{m-1,n;p} + 2\left(1 - \frac{p\ell^2}{k^2} - b\frac{p\ell^2}{h^2}\right)v_{m,n;p}$$
$$+ \frac{p\ell^2}{k^2} v_{m,n+1;p} + b\frac{p\ell^2}{h^2} v_{m+1,n;p} + (b+d)\frac{p\ell^2}{hk}\left[u_{m,n;p} - u_{m+1,n;p}\right.$$
$$\left. - u_{m,n+1;p} + u_{m+1,n+1;p}\right] + a\frac{p\ell^2}{k}\left[T_{m,n;p} - T_{m,n+1;p}\right] - v_{m,n;p-1}$$

(3)
$$-\left(\frac{1}{K^* p\ell} - \frac{2}{h^2} - \frac{2}{k^2}\right) T_{m,n;p} + \frac{1}{h^2} T_{m-1,n;p} + \frac{1}{k^2} T_{m,n-1;p}$$
$$+ \frac{1}{h^2} T_{m+1,n;p} + \frac{1}{k^2} T_{m,n+1;p} + \frac{1}{K^* p\ell} T_{m,n;p-1} =$$
$$\frac{g}{hp\ell}\left(u_{m+1,n;p} - u_{m,n;p}\right) \frac{g}{kp\ell}\left(v_{m,n+1;p} - v_{m,n;p}\right) + \frac{g}{hp\ell}\left(u_{m,n;p-1}\right.$$
$$\left. - u_{m+1,n;p-1}\right) + \frac{g}{kp\ell}\left(v_{m,n;p-1} - v_{m,n+1;p-1}\right)$$

Les conditions initiales discrétisées donnent :

$$u_{m,n;o} = v_{m,n;o} = u_{m,n;1} = v_{m,n;1} = 0$$

$$T_{m,n;0} \qquad \forall\ 0 < m, n \leq MX + 1,\ NX + 1$$

Discrétisons les conditions aux limites, nous obtenons :

- pour les conditions aux limites thermiques le système IV :

IV

$$\begin{cases} T_{o,n\,;\,p}\left(A^{(1)} + \dfrac{B^{(1)}}{h}\right) - \dfrac{B^{(1)}}{h}\, T_{1,n\,;\,p} = C^{(1)} \\ n = 0, 1 \ldots NX \\ \\ T_{MX+1,n\,;\,p}\left(A^{(2)} + \dfrac{B^{(2)}}{h}\right) - \dfrac{B^{(2)}}{h}\, T_{MX,n\,;\,p} = C^{(2)} \\ n = 1, 2, \ldots NX + 1 \\ \\ T_{m,0\,;\,p}\left(A^{(3)} + \dfrac{B^{(3)}}{k}\right) - \dfrac{B^{(3)}}{k}\, T_{m,1\,;\,p} = C^{(3)} \\ m = 1, \ldots MX + 1 \\ \\ T_{m,NX+1\,;\,p}\left(A^{(4)} + \dfrac{B^{(4)}}{k}\right) - \dfrac{B^{(4)}}{k}\, T_{m,\,NX\,;\,p} = C^{(4)} \\ m = 0, 1 \ldots MX \end{cases}$$

- pour les conditions aux limites mécaniques le système V.

Il est donné dans l'annexe . On l'obtient après avoir discrétisé les contraintes de la manière suivante :

$$\sigma_{11\,m,n\,;\,p} = \frac{d}{2k}\left(v_{m,n+1\,;\,p} - v_{m,n-1\,;\,p}\right) + \frac{1}{2h}\left(u_{m+1,n\,;\,p} - u_{m-1,\,n\,;\,p}\right) - a\, T_{m,n\,;\,p}$$

$$\sigma_{12\,m,n;p} = \sigma_{21\,m,n;p} = \frac{b}{2}\left(\frac{u_{m,n+1\,;\,p} - u_{m,n-1\,;\,p}}{k} + \frac{v_{m+1,n;p} - v_{m-1,n;p}}{h}\right.$$

$$\sigma_{22\,m,n;p} = \frac{d}{2h}(u_{m+1,n;p} - u_{m-1,n;p}) + \frac{1}{2k}(v_{m,n+1;p} - v_{m,n-1;p})$$

$$- aT_{m,n;p}$$

b) Stabilité du schéma choisi.

Nous utilisons la méthode de Von Neumann donnée au chapitre précédent. Elle détermine les relations auxquelles doivent satisfaire h, k et $p\ell$ pour que le schéma aux différences finies (système III) soit stable.

Soient $\varepsilon_u m,n;p$, $\varepsilon_v m,n;p$, $\varepsilon_T m,n;p$ les erreurs numériques réalisées respectivement sur u, v et T au bout du temps $t = p \cdot p\ell$ (c'est-à-dire à la p ième phase de calcul).

Prenons :

$$\varepsilon_u m,n;p = \xi_u^p\, e^{j\beta(mh+nk)} \quad \text{avec} \quad \xi_u^p = e^{\alpha_u p\ell}$$

$$\varepsilon_v m,n;p = \xi_v^p\, e^{j\beta(mh+nk)} \quad \text{avec} \quad \xi_v^p = e^{\alpha_v p\ell}$$

$$\varepsilon_T m,n;p = \xi_T^p\, e^{j\beta(mh+nk)} \quad \text{avec} \quad \xi_T^p = e^{\alpha_T p\ell}$$

β réel, α_u, α_v, α_T complexes.

Prenons h = k = le plus petit des deux. Dans ce cas $\xi_u = \xi_v = \xi$ et la stabilité du schéma sera obtenue pour $|\xi|$ = valeur absolue de $\xi \leq 1$ et $|\xi_T| \leq 1.\xi$ et ξ_T satisfont au système algébrique suivant :

$$\text{VI} \quad \begin{cases} \dfrac{\xi^2}{p\ell^2} - \xi\left[-\dfrac{4\sin^2\frac{\beta h}{2}}{h^2}(1+b) + \dfrac{2}{p\ell^2} + \dfrac{b+d}{h^2}(e^{j\beta h}-1)^2\right] + \dfrac{1}{p\ell^2} + a\left(\dfrac{e^{j\beta h}-1}{h}\right)\xi_T = 0 \\ \xi_T\left[-8\dfrac{\sin^2\frac{\beta h}{2}}{h^2} - \dfrac{1}{K^* p\ell}\right] + \dfrac{1}{K^* p\ell} + 2g(1-\xi)\left(\dfrac{e^{j\beta h}-1}{p\ell h}\right) = 0 \end{cases}$$

En éliminant ξ_T entre les deux équations et en posant $\xi = e + jf$ ($j^2 = -1$) on obtient :

$$f = \frac{a}{K^* h\, p\ell\, P[X]} \sin\beta h$$

$$e^2\left(\frac{X}{p\ell^2} + \frac{1}{K^* p\ell^3}\right) - e\, P[X] + \frac{X}{p\ell}\left(\frac{1}{p\ell} + ag\right) + \frac{1}{K^* p\ell^3} + \frac{a}{p\ell\, h\, K^*}(\cos\beta h - 1)$$

$$+ f^2\left(\frac{X}{p\ell^2} + \frac{1}{K^* p\ell^3}\right) = 0$$

avec :

$$X = \frac{8 \sin^2 \frac{\beta h}{2}}{h^2}$$

$$P[X] = - X^2 b + X\left(\frac{2}{p\ell^2} - \frac{b}{K^* p\ell} + \frac{ag}{p\ell}\right) + \frac{2}{K^* p\ell^3}$$

La condition

$$\text{(i)} \quad \boxed{\frac{p\ell}{h} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2b}}} \quad \Rightarrow \quad P[X] > 1$$

Dans ce cas

$$f < \frac{a}{K^* p\ell\, h}$$

et e satisfait à l'inéquation VII.

$$\text{VII} \quad \left\{ \begin{array}{l} e^2\left(\frac{X}{p\ell^2} + \frac{1}{K^* p\ell^3}\right) - e + \frac{X}{p\ell}\left(\frac{1}{p\ell} + ag - \frac{1}{4K^*} h a\right) + \frac{1}{K^* p\ell^3} \\ \qquad + \frac{a^2}{K^{*2} p\ell^2 h^2}\left(\frac{X}{p\ell^2} + \frac{1}{K^* p\ell^3}\right) > 0 \end{array} \right.$$

Le polynome en $\boxed{e}$ du premier membre de VII, est vérifié quelque soit $\boxed{e}$ réel. Donc on peut prendre $e \leq 1$ et $f = 0$ ce qui entraîne $|\xi| \leq 1$.

On peut montrer que (i) suffit à assurer $|\xi_T| \leq 1$. En effet VI donne :

$$\xi_T = \left(\frac{1}{K^*_{p\ell}} + \frac{F}{h}(1 - \xi)(\cos\beta h - 1 + j \sin\beta h)\right)\frac{1}{D}$$

avec : $F = \frac{2g}{p\ell}$ et $D = X + \frac{1}{K^*_{p\ell}}$

$$|\xi| \leq 1 \Rightarrow |\xi_T| \leq \left[\frac{1}{K^{2*}_{p\ell}} + \frac{F^2h^2X^2}{16} - \frac{XFh}{2K^*_{p\ell}} + \frac{F^2X}{2}\right]\frac{1}{D^2} = Q^*$$

$$Q^* \leq 1 \Leftrightarrow X \geq \frac{\frac{2}{K^*_{p\ell}} + \frac{Fh}{2K^*_{p\ell}} - \frac{F^2}{2}}{\frac{F^2h^2}{16} - 1} = F^*$$

F^* est toujours < 0, X est toujours ≥ 0, donc $X > F^*$ quelque soit h et $p\ell$. Donc (i) suffit à assurer la stabilité du schéma complet.

Exemple numérique.

Pour le cuivre nous avons en C - G - S :

$\lambda = 1,4\ 10^{12}$ dynes/cm^2.
$\mu = 0,45\ 10^{12}$ dynes/cm^2.
$\rho = 8,94$

La vitesse des ondes longitudinales est :

$$C_\ell = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = 487500 \text{ cm/s}$$

La vitesse des ondes transversales est :

$$C_t = \sqrt{\frac{2\mu}{\rho}} = 317100 \text{ cm/s.}$$

Les conditions de stabilité donnent :

- En coordonnées réduites :

$$p\ell \leq \frac{h}{2}\frac{C_\ell}{C_t} < \frac{h}{2}$$

- En coordonnées réelles :

$$P\ell < \frac{H}{2C_t} < \frac{H}{2C_\ell}$$

avec :

$$H = \frac{h}{C_\ell}$$

et

$$P\ell = \frac{p\ell}{C_\ell^2}$$

c) Programmation du problème.

Elle a été faite sur IBM 7040 en language "Fortran IV".

Le programme principal d'environ 550 instructions comporte une très grande boucle de temps utilisée autant de fois que l'on veut faire d'itération dans le temps.

Notons D l'intérieur de la plaque, Γ sa frontière, $E = D + \Gamma$ la plaque toute entière.

La première boucle que nous appellerons B_1 se fait au temps $t_1 = p\ell$. Les conditions initiales donnent les variations de température et les deux composantes du déplacement au temps $t_o = 0$ dans E. Elles sont respectivement notées T_o, u_o et v_o. Elles fournissent aussi u_1 et v_1 dans D. A l'intérieur de B_1, on calcule d'abord T_1 dans E. Pour cela on utilise la troisième équation du système III et les conditions aux limites thermiques. Le tout est groupé en un système linéaire dont la matrice représentative, très creuse a été réduite en un tableau rectangulaire plus compact dont la plus petite dimension est fixée à 6 si l'on tient compte du second membre, la plus grande dimension étant égale à : (MX + 2) (NX + 2). Un sous programme de résolution par une méthode itérative de surrelaxation, avec paramètre optimal à 1, 45, a été établi sous le nom de GOSRB 1. Il donne d'excellents résultats quant à la rapidité d'exécution et la convergence (24 itérations environ pour une erreur relative $\leq 10^{-5}$).

L'utilisation de données physiques supplémentaires, présence de gradient de température, faible ou fort, à l'extérieur de E, perte de chaleur par rayonnement, permet de déduire du calcul précédent, les T_1 sur une bande extérieure à E, notée E_{ex}.

Toutes ces valeurs interviennent dans les conditions aux limite mécaniques. Ces dernières servent à déterminer u_2 et v_2 sur E_{ex}. Enfin les équations explicite (1) et (2) du système III donnent u_1 et v_1 sur Γ. Suivent les expressions des contraintes et des déformations. On recommence ensuite pour $t_2 = 2p\ell$, ce qui constitue la boucle B_2, puis pour $t_3 = 3p\ell$ donnant B_3, etc ... ; mais pour B_i avec $i > 1$, les équations (1) et (2) du système III donnent u_i et v_i dans E tout entier. A ce programme principal, s'ajoutent trois sousprogrammes. Deux servent à l'expression des conditions aux limites thermiques : CHAUF donne l'évolution de la température sur la face I ; AIRAY exprime une loi du rayonnement de la chaleur dans l'air sur la face II. Le troisième est GOSRB 1. Les données peuvent être modifiées de manière à étudier le problème pour diverses conditions aux limites, dans les cas couplés et non couplés.

De plus une utilisation convenable des paramètres introduits dans le programme, permet de faire une étude expérimentale de la convergence des solutions approchées obtenues.

Pour cela, nous effectuons des calculs pour des réseaux de plus en plus serrés. Nous introduisons l'entier IN dans le programme principal, si bien qu'à la sortie nous obtenons toujours les mêmes points du réseau ce qui facilite la comparaison des résultats.

La convergence est dans tous les cas parfaite lors de la résolution du système constitué par l'équation (3) et les conditions aux limites thermiques. Ce fait est conforme aux conclusions théoriques des pages précédentes. En effet, en différences finies, l'expression implicite de l'équation de conduction de la chaleur ne nécessite pas de condition de stabilité sur h, k et $p\ell$. Le terme de couplage qui s'ajoute à cette équation pour constituer (3), est suffisamment petit pour ne pas perturber cette stabilité.

Pour les équation (1) et (2) les schémas explicites accompagnés de la condition de stabilité (i) sur $p\ell$, h et k donnent une très bonne convergence dans D. Ceci est encore conforme aux conclusions de notre étude de la stabilité du système III.

Pourtant, en pratique, et dès la deuxième phase de temps, la forme des conditions aux limites mécaniques en particulier aux angle de Γ, peut perturber cette convergence. Nous donnons ici des conclusions personnelles sur ce problème actuellement suffisantes quant à l'utilisation physique de ce calcul mais mathématiquement incomplètes.

Le problème de Dirichlet offre une convergence parfaite sur T, v, u, E_{11}, E_{22}, E_{12}, σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}. Il est évident que dans ce cas, il n'y a aucune ambiguité sur l'expression des valeurs de u, v, T au bord.

Par contre, pour le problème de Neumann et pour celui des liaisons élastiques sur une ou plusieurs des quatre faces, la forme de discrétisation des dérivées normales sur Γ, surtout aux coins influe sur la stabilité des solutions obtenues sur les bords ceci dès la deuxième phase de temps.

Le choix de schémas centrés aux coins utilisé au paragraphe b), s'avère peu astucieux. L'expérience montre en effet que les informations apportées par les conditions aux limites, sont mal transmises par D. Néanmoins nous avons conservé ce schéma à cause de sa simplicité mais nous donnons les résultats numériques qui suivent pour un $p\ell$ très petit (10^{-4}). Dans ce cas une bonne convergence reste maintenue et les effets du couplage apparaissent quand même si bien que l'exploitation physique que nous voulons faire est possible sans compliquer les expressions mathématiques donc le problème numérique. Nous pouvons ajouter cependant après diverses discussions et réflexions que l'obtention de la convergence sur les bords dans tous les cas, nécessite une combinaison de schémas centrés et décentrés aux angles et l'utilisation de la double précision numérique.

Les deux cas donnés ici échappent à ce fait, pourtant le problème numérique reste ouvert et nous consacrons la suite de nos travaux à le résoudre complètement.

°°°

III. - RESULTATS NUMERIQUES OBTENUS. INTERPRETATION PHYSIQUE.

Tous nos calculs sont effectués pour une plaque de cuivre pour laquelle DX = 0,01 cm , DY = 0,6 cm , $\alpha = 12\ 10^{-8}$, K = 1,14 , C = 0,924 CGS, les valeurs des autres coefficients étant donnés à la page 33. Le réseau choisi correspond à NX = 39 et MX = 3 ce qui entraîne : $k = \frac{DY}{40}$ et $h = \frac{DX}{4}$.

Nous donnons trois cas particuliers. Dans tous, nous conservons les mêmes conditions aux limites thermiques et ne modifions que les conditions aux limites mécaniques. En ce qui concerne les premières, le problème traité est le suivant : nous supposons la face III de la plaque soumise à un échauffement qui élève sa température jusqu'à 300 °C en une seconde. La face IV n'est chauffée que jusqu'à 150 °C. La variation de T sur la face I est connue, quant à la face II elle rayonne de la chaleur avec l'extérieur suivant une loi décrite dans le sous programme "AIRAY". Les coefficients $A^{(\alpha)}$, $B^{(\alpha)}$ et $C^{(\alpha)}$ $\alpha = 1, 2, 3, 4$ prennent alors les valeurs suivantes :

$$A^{(1)} = A^{(2)} = A^{(3)} = A^{(4)} = 1$$

$$B^{(1)} = B^{(3)} = B^{(4)} = 0$$

$$B^{2}(y) = y(y - DY)10^{-4}$$

$C^{(1)}(y, t) = \phi(y, t)$ donnée par le sous programme CHAUF.

$$C^{(2)}(y, t) = (C^{(4)}(t) - C^{(3)}(t))\frac{y}{DY} + C^{(3)}(t)$$

$$C^{(3)}(t) = 130(e^{2\gamma(t)} - 1) = 130(e^{2\text{Log}\,0,2\,it} - 1)$$

$$C^{(4)}(t) = 47\ (e^{2\,\text{Log}\,0,2\,it} - 1)$$

L'entrée it = 1, 2, ... , 10 fixe le nombre de phases de temps. Ce changement de variable ($t \to it$) permet de considérer la durée de l'échauffement de la plaque non pas s'effectuant en une seconde mais en 10 $p\ell$ seconde. Donc quelque soit la valeur de $p\ell$ aussi petit que l'on veut, le phénomène physique reste important.

En ce qui concerne les conditions aux limites mécaniques nous avons fait trois distinctions.

1.- Problème de Dirichlet.

On maintient sur Γ et sur E_{ex} toutes les composantes du déplacement nulles. Nous présentons les résultats obtenus sous forme de courbes.

La figure (1) donne T(y) variation de température à partir de la température de référence $T_o = 293°K$. T est en degré celsius car il représente la différence entre deux températures absolues. Les courbes correspondent à it = 3 et $p\ell = 10^{-3}$.

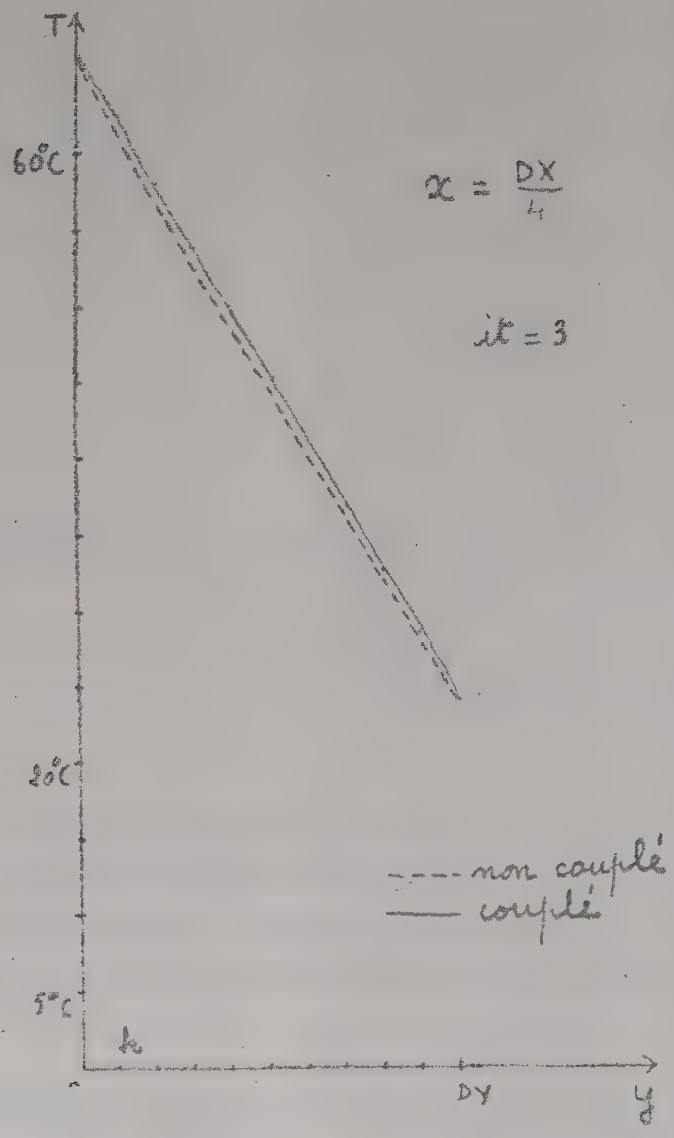


Figure 1

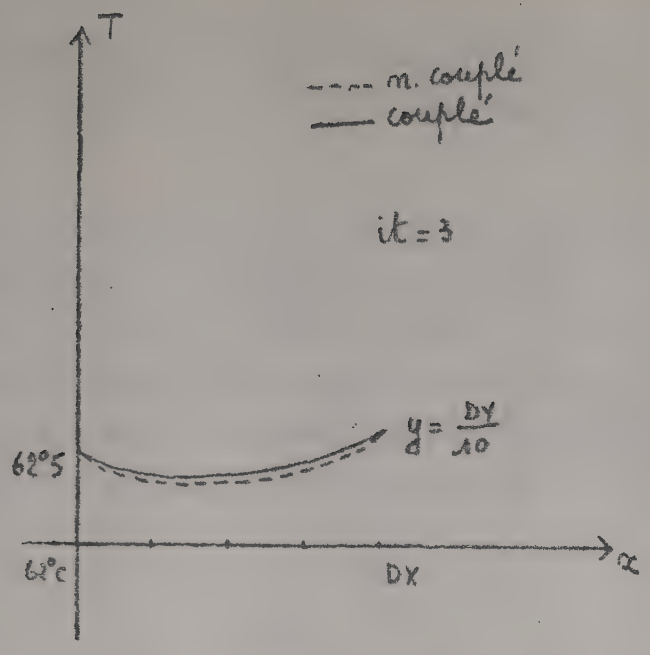


Figure 2

La figure 2 représente T(x) pour y = 0,1 DY et it = 3.

Le tableau qui suit donne les températures résultant des problèmes couplés et non couplés, pour 11 points sur DY, $x = \frac{DX}{4}$ et it = 3.

non couplé	couplé
67° 0431	67° 0431
62° 4859	62° 4910
58° 1316	58° 1360
53° 8599	53° 8640
49° 5528	49° 5564
45° 3052	45° 3085
41° 0341	41° 0370
36° 8133	36° 8161
32° 5646	32° 5670
28° 3688	28° 3711
24° 3386	24° 3386

L'écart entre les températures pour un même point inférieur ou égal à 0,01°C est négligeable.

Il en est de même pour les composantes du tenseur déformation représenté en fonction de x et de y toujours pour it = 3, par les figures 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

3 et 4 donnent respectivement $E_{11}(y)$ et $E_{11}(x)$. Sur la face I, c'est-à-dire pour x = 0, $E_{11}(y)$ part de 0, monte jusqu'à $0,13029\ 10^{-8}$, redescend, prend de faibles valeurs négatives et remonte jusqu'à 0. Pour $x = \frac{DX}{4}$ $E_{11}(y)$ varie de 0 à 0 en ne prenant que des valeurs négatives dont la plus faible calculée est $-0,4428\ 10^{-8}$. Puis pour $x \geq \frac{3DX}{4}$ $E_{11}(y)$ est franchement > 0 pour atteindre des valeurs maximales à $0,8773\ 10^{-8}$ sur la face II c'est-à-dire à x = DX.

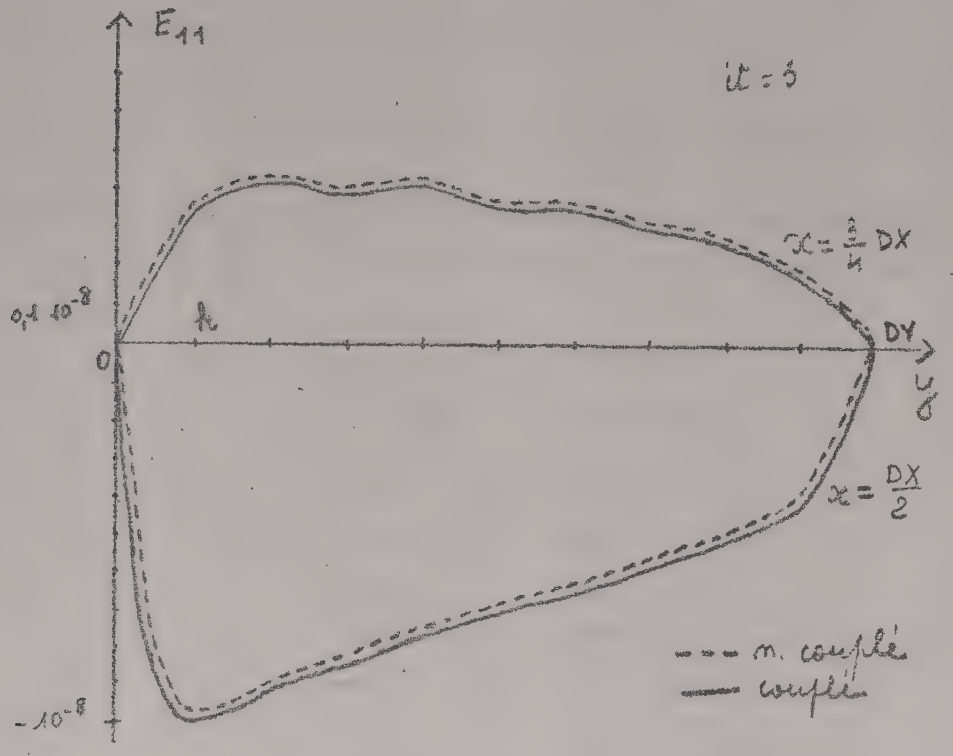


Figure 3

La figure 4 met en évidence ces changements de signe.

Notons $E_{11}(y)$ maximale pour $y \# \frac{DY}{3}$.

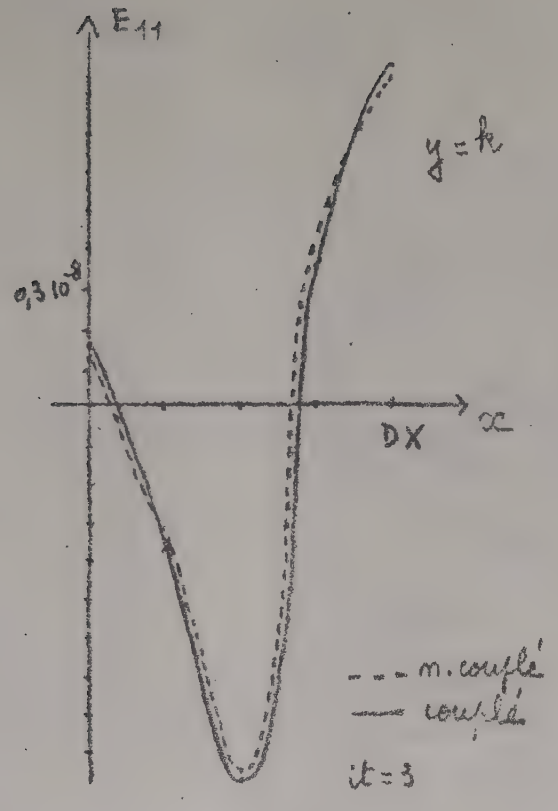
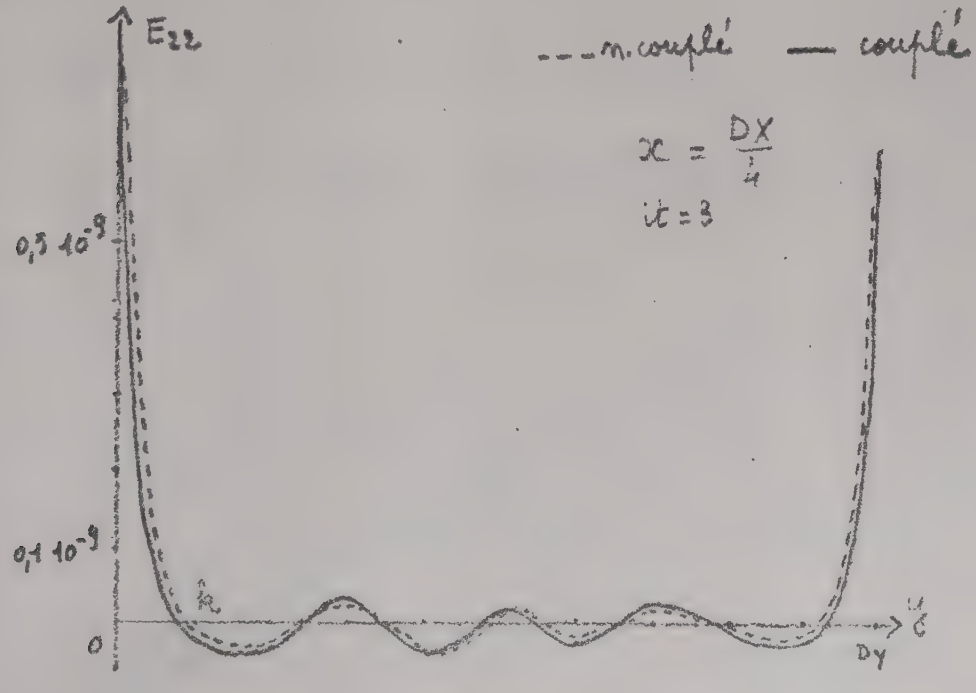


Figure 4

Les composantes du tenseur déformation $E_{22}(y)$ sont maximales sur les faces III et IV où elles sont de l'ordre de 10^{-8}. Par contre elles sont beaucoup plus faibles (ordre de 10^{-10}) dans D ce qui est normal car la longueur DY est beaucoup plus grande que DX.



- Figure 5 -

$E_{22}(x)$ est nul sur les faces I et II, reste faible dans D tantôt > 0 tantôt < 0 mais avec des valeurs absolues maximales pour $x \# \frac{DX}{4}$.

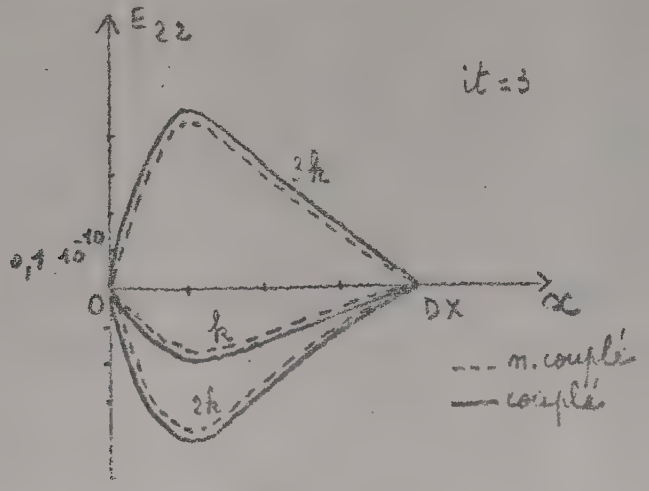


Figure 6

Les composantes $E_{12}(x, y)$ sont nulles aux quatre coins de la plaque. Sur les faces III et IV, $E_{12}(y)$ reste très voisin de 0 et se maintient dans D à des valeurs presque constantes.

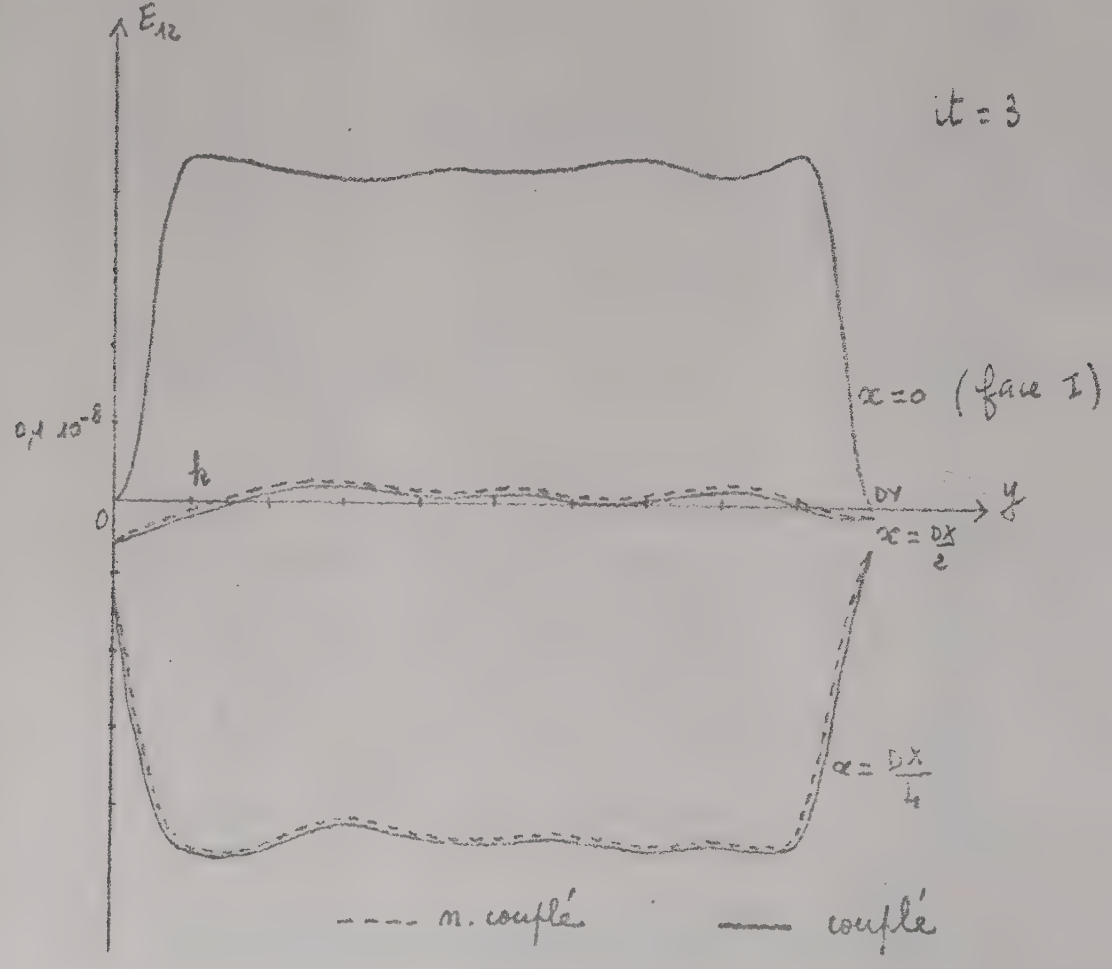
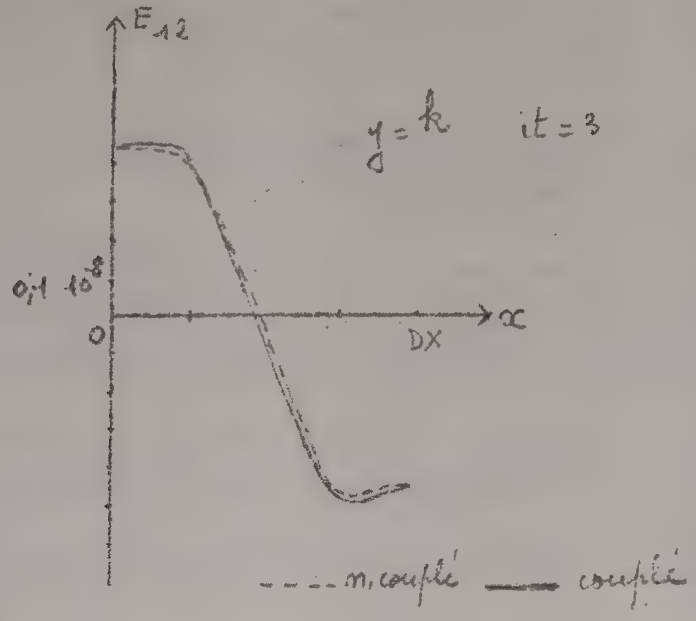


Figure 7

Entièrement positif sur la face I $E_{12}(x)$ change de signe pour $x = \frac{DX}{2}$ et devient négatif sur la face II (figure 8).



- Figure 8 -

Les contraintes réduites $\sigma_{11}(y)$ et $\sigma_{22}(y)$ ont les mêmes courbes de variations. Elles sont proportionnelles à T(y) c'est-à-dire linéaire par rapport à y mais toutes négatives (figure 9). Ceci tient au fait que le terme prépondérant dans leurs expressions algébrique, reste la température.

Sur les faces III et IV elles sont constantes mais varient avec it comme les températures.

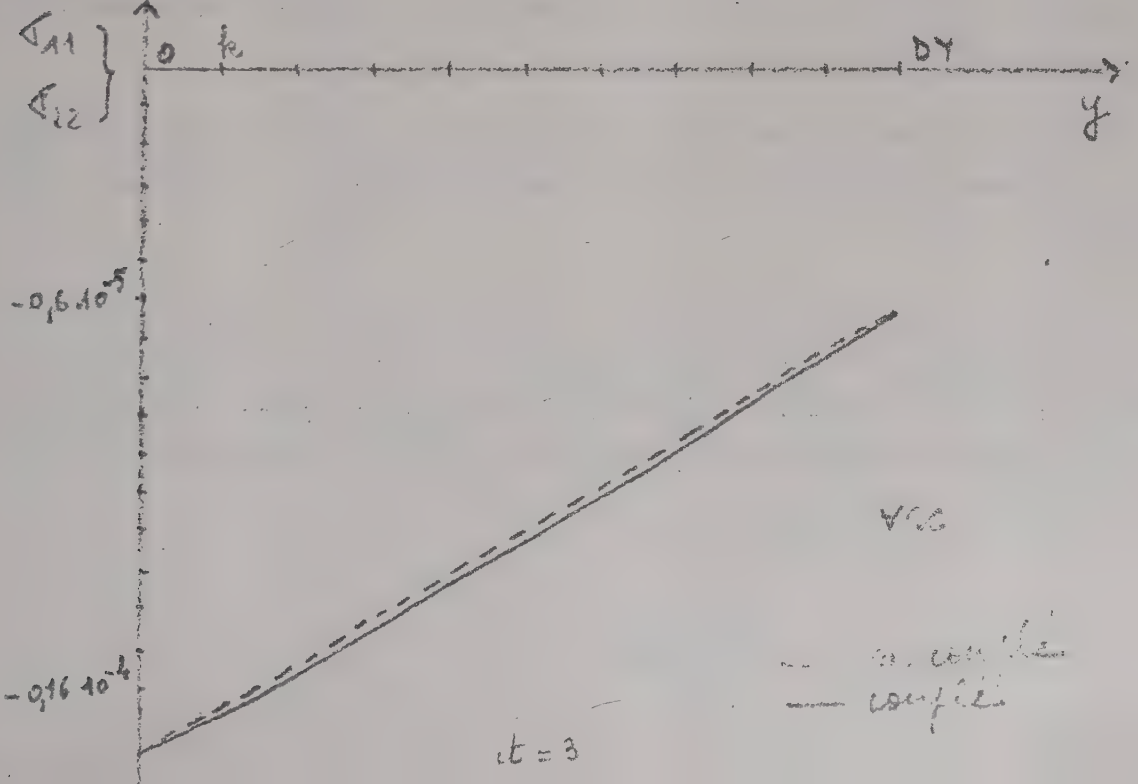


Figure 9

$\sigma_{11}(x)$ et $\sigma_{22}(x)$ sont représentées par des parallèles à l'axe des x à des niveaux différents, variant linéairement de $-0,1783\ 10^{-4}$ à $-0,06445\ 10^{-4}$. si bien que dans le plan de la plaque les isocontraintes peuvent être visualisées par des droites parallèles aux faces III et IV.

σ_{12} varie comme E_{12} étant donné que ces deux composantes sont proportionnelles (figure 10 et figure 11).

D'une manière générale, nous avons représenté sur les mêmes graphiques les courbes correspondant au problème couplé (en trait plein) et celles correspondant au problème non couplé (en pointillés).

Mais nous pouvons conclure qu'en ce qui concerne le problème de Dirichlet (nul ou non) l'influence du couplage est négligeable.

Il n'en est pas de même pour les deux exemples qui suivent.

2.- Problème de Neumann.

Pour nous ce problème est équivalent à la donnée des contraintes sur les bords. En effet, les contraintes s'expriment en fonctions des différentes dérivées des composantes u et v du déplacement. Dans le calcul effectif, nous ferons donc tous les coefficients $A_{ij}^{(\alpha)}$ nuls quels que soient les valeurs de α, i et j ; les $C_i^{(\alpha)}$ sont pris tous nuls aussi.

Nous présentons les résultats obtenus sous forme de courbes comme dans les pages précédentes en portant sur le même graphique les valeurs données par les problèmes couplé et non couplé.

En ce qui concerne les températures $T(x, y)$, le problème non couplé donne une variation continue pour $T(x, y)$ avec des dérivées premières continues par rapport à x et à y.

Par contre le même problème où l'on tient compte du couplage donne encore une variation de $T(x, y)$ continue mais il n'en est plus de même pour les dérivées partiellles premières $\frac{\partial T}{\partial y}$ et $\frac{\partial T}{\partial x}$. En effet la figure 12 montre que $\frac{\partial T}{\partial y}$ présente deux discontinuités : l'une pour $y \# \frac{DY}{10}$, l'autre pour $y \# \frac{9}{10}$ DY.

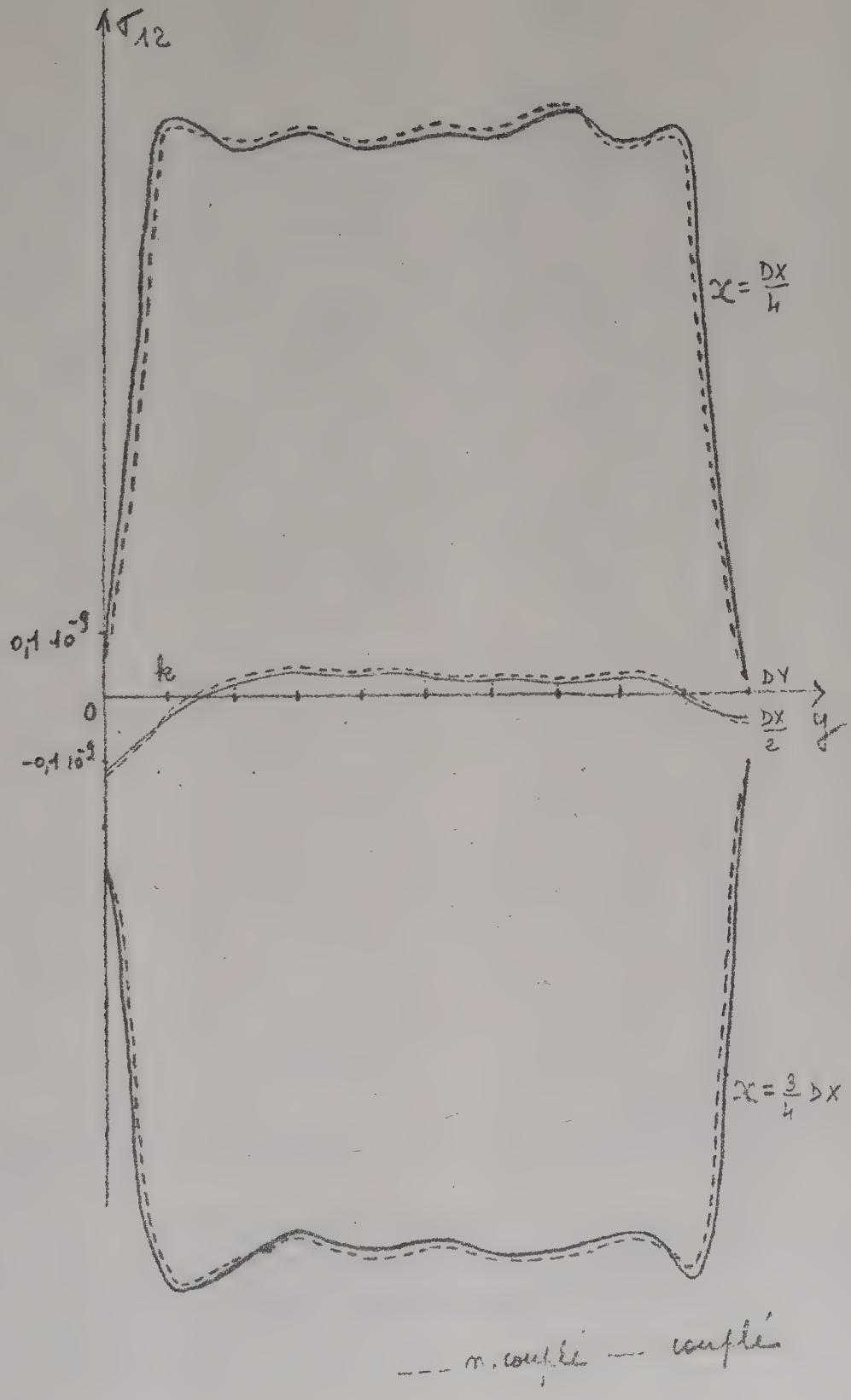

τ_{12}
$x = \frac{DX}{4}$
$0{,}1\ 10^{-9}$
k
DY
0
$\frac{DX}{2}$
y
$-0{,}1\ 10^{-9}$
$x = \frac{3}{4} DX$
--- n. corrigé — corrigé

Figure 10

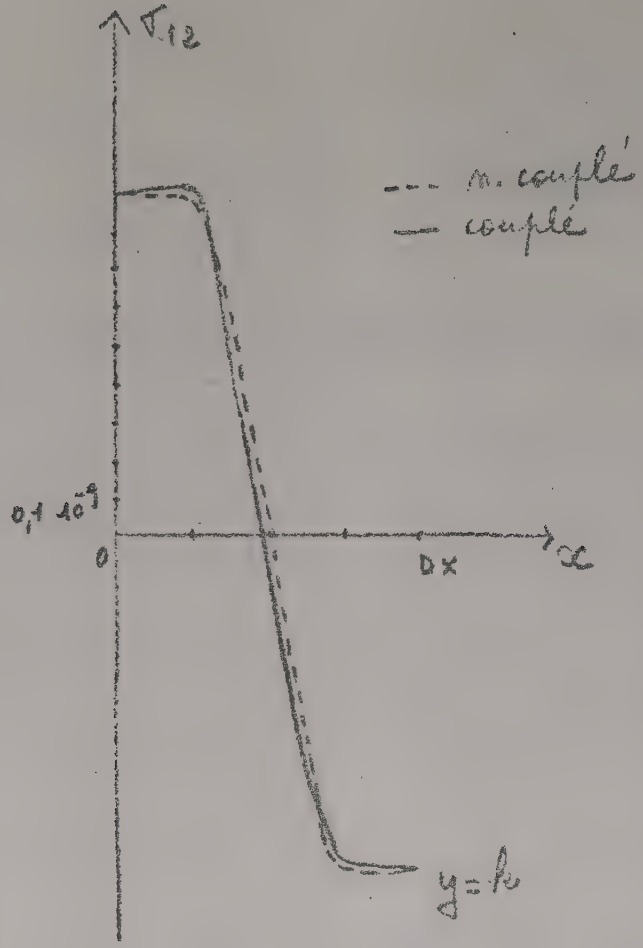


Figure 11

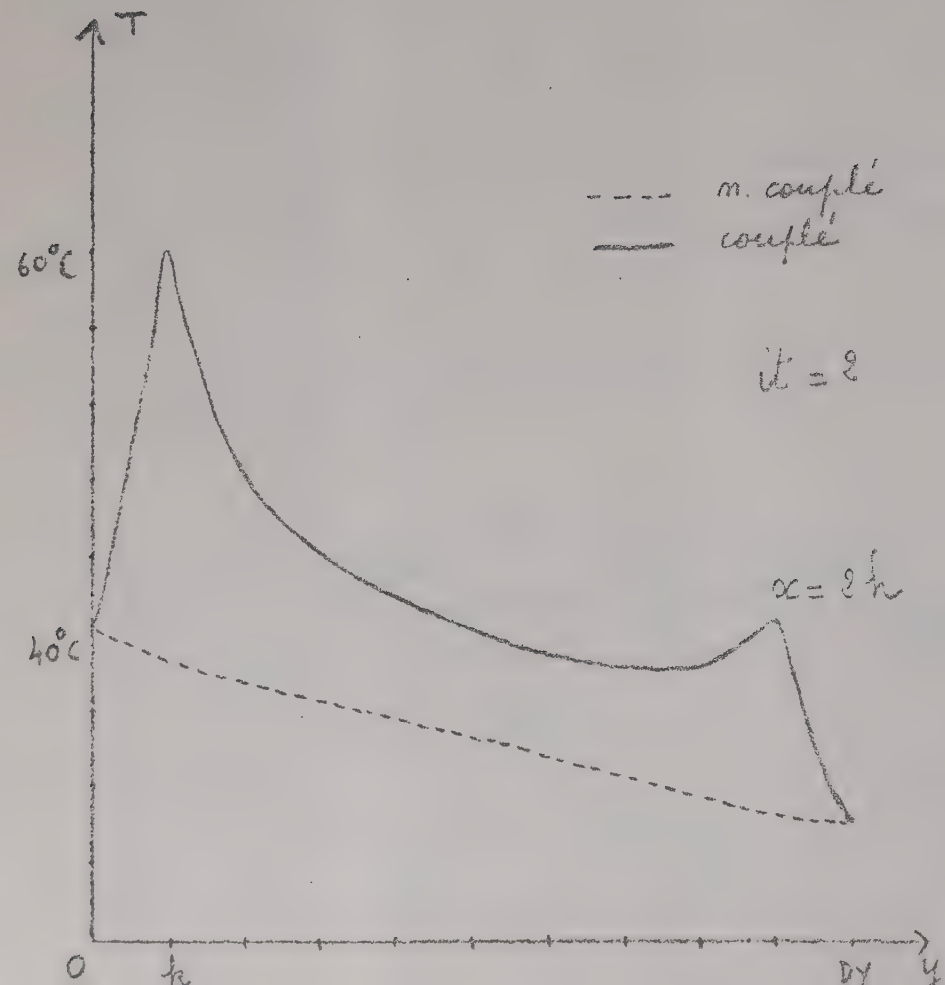


Figure 12

Le graphique correspondant à la figure 13 permet d'observer une discontinuité de $\frac{\partial T}{\partial x}$ pour $x \neq \frac{DX}{4}$. Lorsque it varie de 1 à 7, ces discontinuités restent fixes en x et en y.

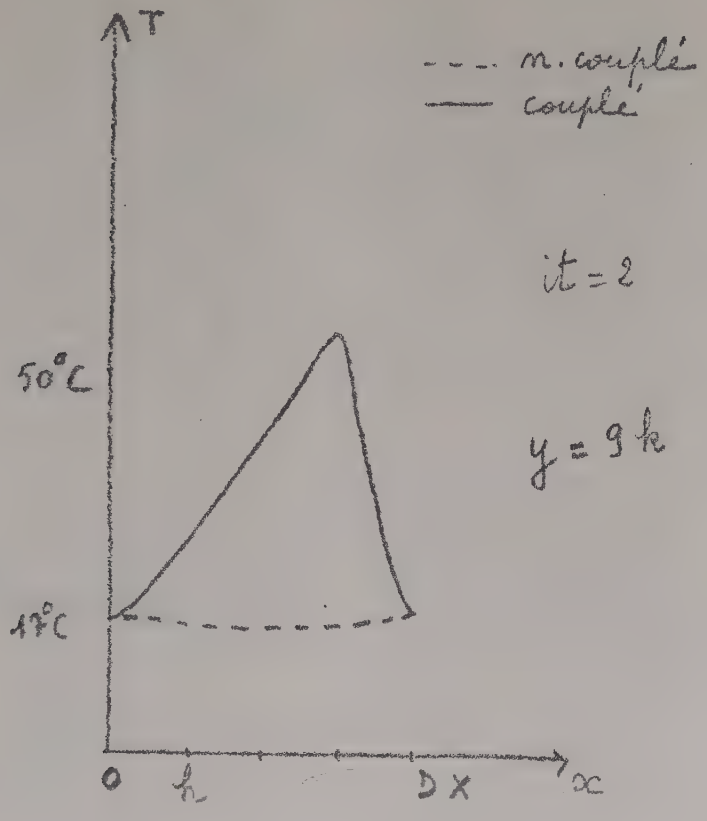


Figure 13

Physiquement le couplage met en évidence des "pics" ou augmentation brusques de T en des points bien déterminés. Ils s'accompagnent de discontinuités du champ de température, discontinuités conditionnées par les conditions sur Γ. Ces considérations sont en accord avec certaines des conclusions de Boley et Tolins [7] sur l'influence du couplage, conclusions rappelées par Lefkowitz [9]. Les temps de calculs étant très longs (45 minutes pour 4 it = 4) nous n'avons fait que 7 itérations en tout. Lorsque it augmente nous avons constaté que les valeurs des températures des "pics" observés, augmentent.

Nous avons remarqué aussi que les effets du couplage sont nuls sur les composantes u et v du déplacement donc sur E_{11}, E_{22}, E_{12} composantes du tenseur déformation. La figure 14 présente $E_{11}(y)$ sur une partie de Γ : face I ($x = 0$) et face II ($x = DX$) Dans D les maximums des valeurs absolues de $E_{11}(y)$ correspondent aux pics observés sur T(y) donnés par le problème couplé.

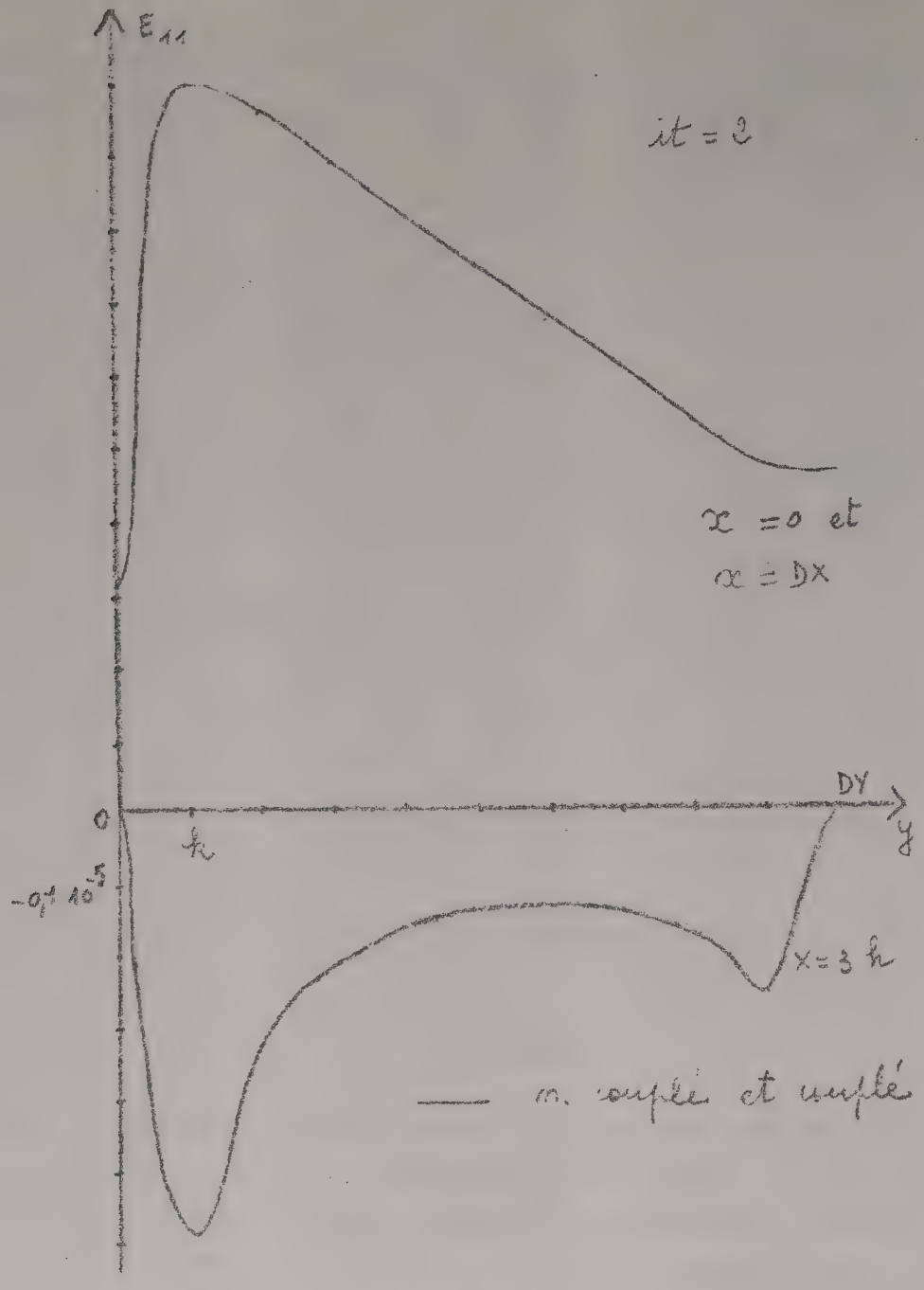


Figure 14

$E_{11}(x)$ donné par la figure 15 reste maximal c'est-à-dire de l'ordre de 10^{-4} sur les faces I et II puis il devient très faible c'est-à-dire de l'ordre de 10^{-8} dans D, reprend des valeurs négatives mais de l'ordre de 10^{-5} en valeur absolue à partir de $x = \frac{3DX}{4}$.

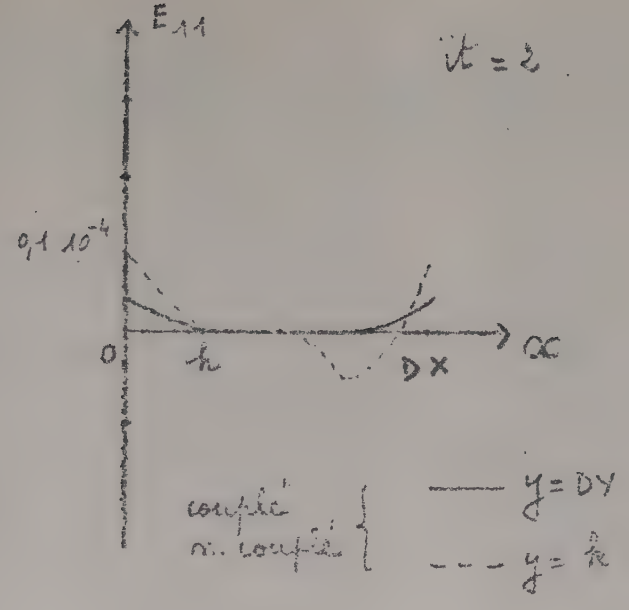


Figure 15

$E_{22}(x, y)$ est nul dans D et sur les faces I et II. Il prend ses valeurs maximales (de l'ordre de 10^{-4}) sur les faces III et IV (figure 16).

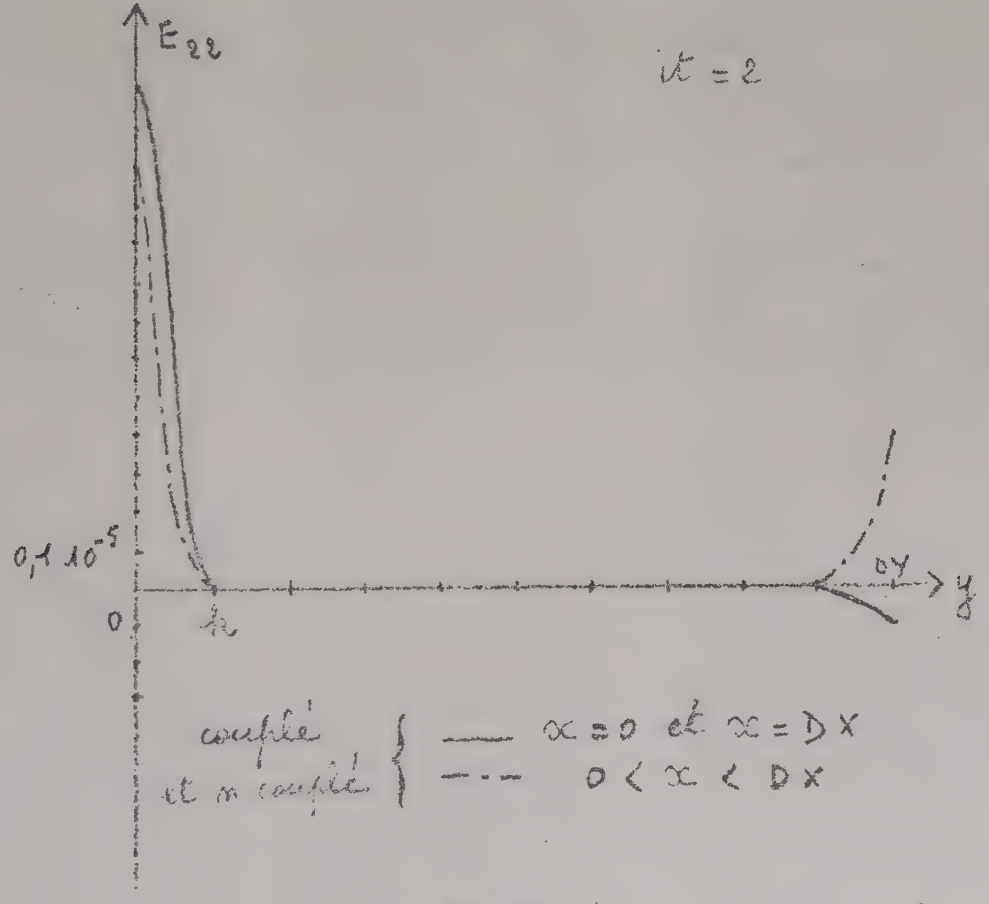


Figure 16

$E_{22}(x)$ est nul quelque soit $0 < y < DY$. Pour $y = 0$ et $y = DY$ les courbes de variations sont données par la figure 17.

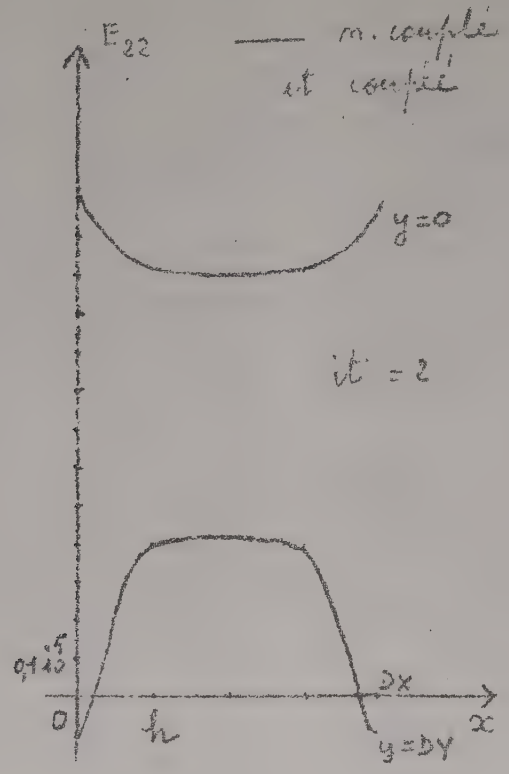


Figure 17

$E_{12}(x, y)$ est nul dans E tout entier.

L'effet du couplage réapparaît sur les courbes représentant les composantes des contraintes : $\sigma_{11}(x, y)$ et $\sigma_{22}(x, y)$. Ces deux fonctions ont des allures identiques mais avec des conditions aux bords différentes : figures 18, 19, 20, 21.

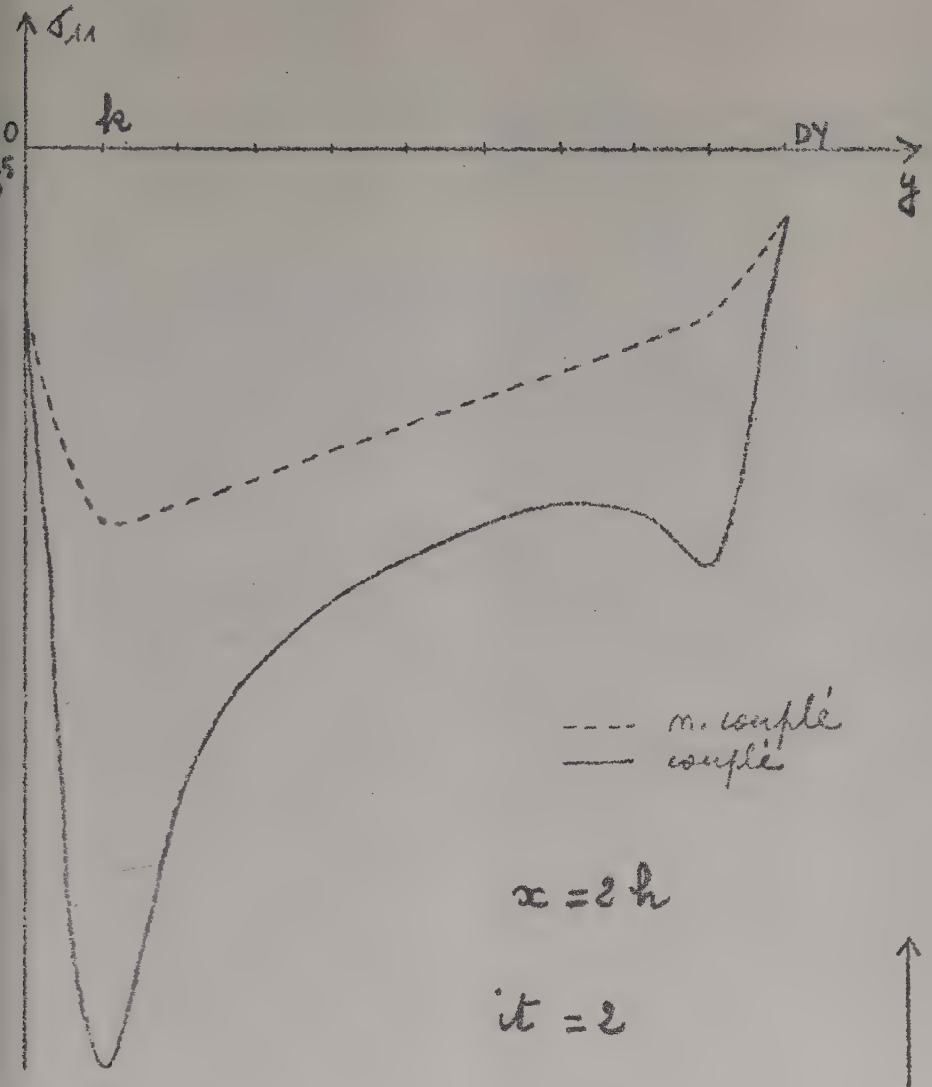


Figure 18

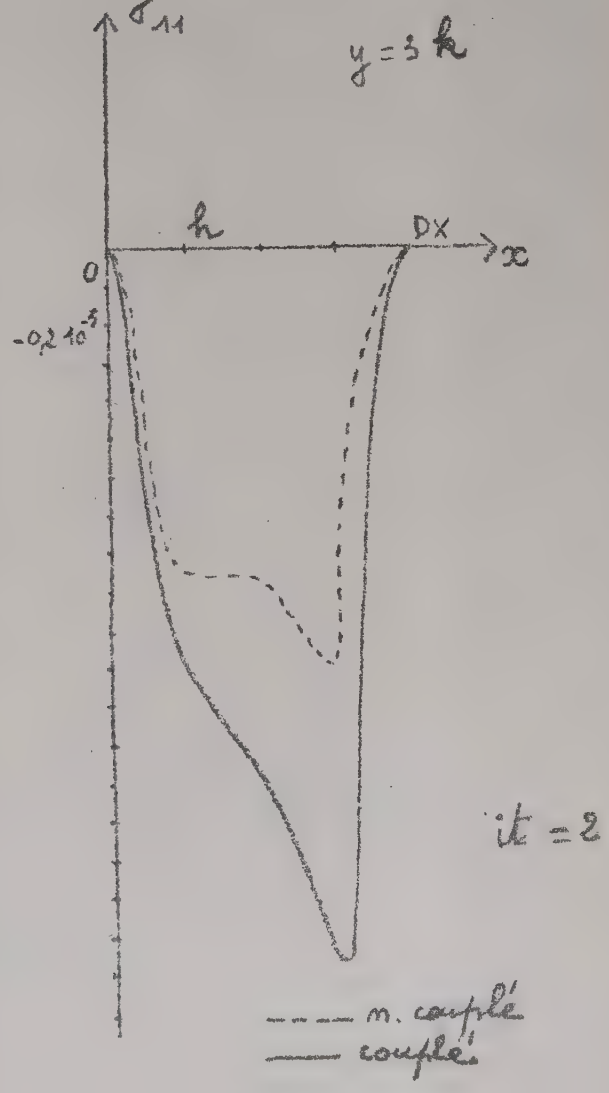


Figure 19

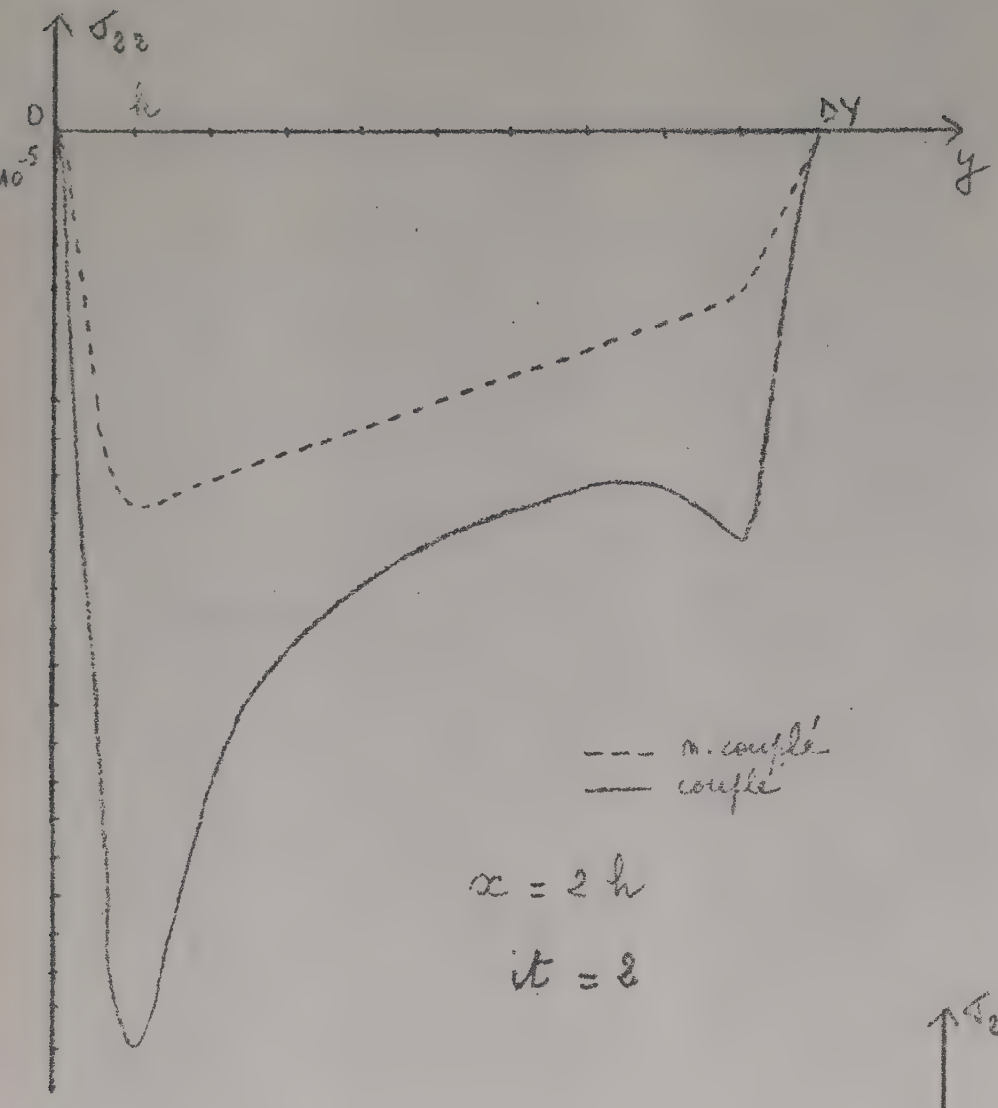


Figure 20

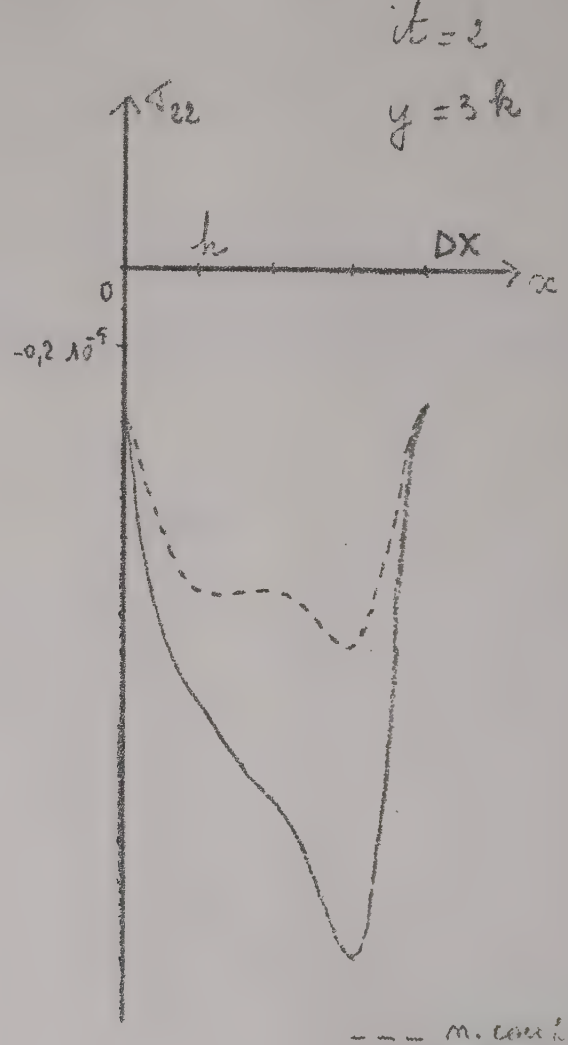


Figure 21

Nous constatons que la présence du couplage accuse les diminutions brusque de $\sigma_{11}(x,y)$ et $\sigma_{22}(x,y)$ aux mêmes endroits où il mettait en évidence les pics de températures.

3.- Liaisons élastiques sur Γ.

Dans cet exemple nous donnons aux $A_{i,i}^{(\alpha)}$ différentes valeurs. Dans tous les cas nous conservons les $A_{ij}^{(\alpha)}$ $(i \neq j)$ et les $C_i^{(\alpha)}$ nuls quelque soit α. Nos constatations sont les suivantes :

- pour $A_{ij}^{(\alpha)}$ prenant les valeurs 10^{-6}, 1 ou 10, les courbes obtenues et nos conclusions sur l'influence du couplage sont équivalentes à celles du problème de Neumann. Pour observer quelques différences nous avons donné à $A_{ij}^{(\alpha)}$ la valeur 10^{10}, pour un $p\ell = 10^{-3}$ seconde. En ce qui concerne les températures nous voyons une augmentation notable des pics de température pour le problème couplé mais le phénomène qualitatif reste le même que celui mis en évidence dans l'exemple (2).

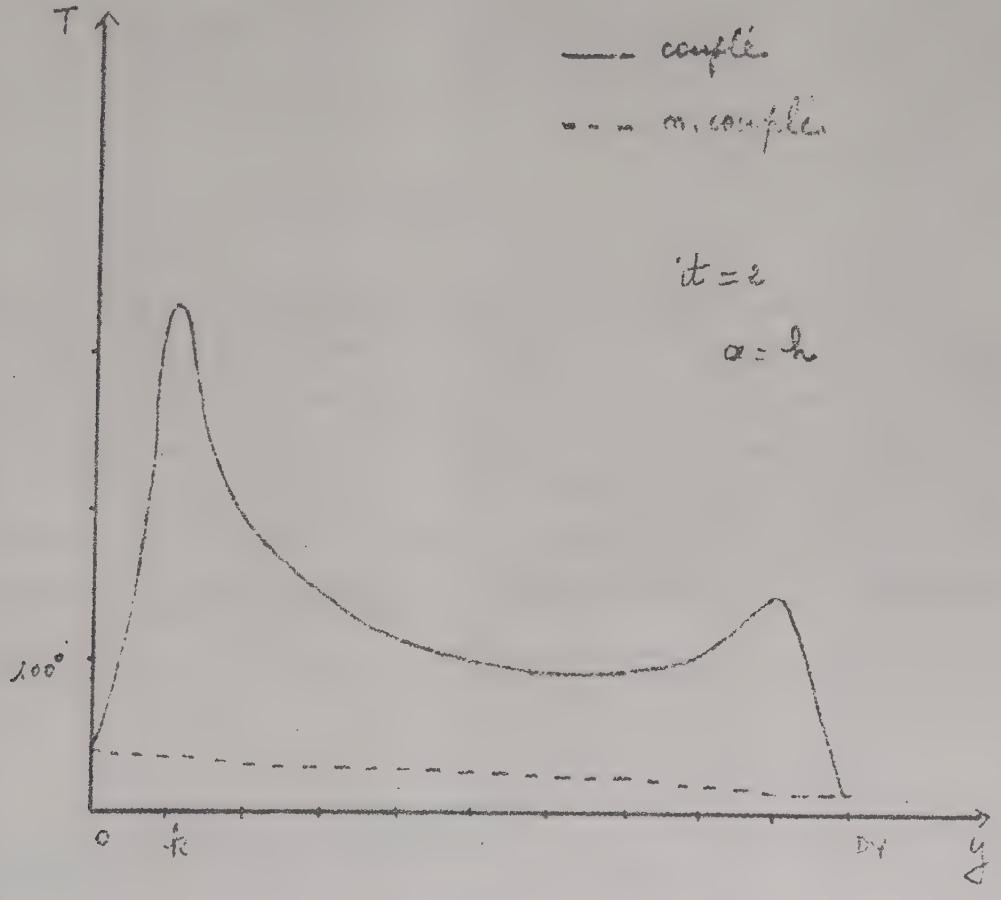
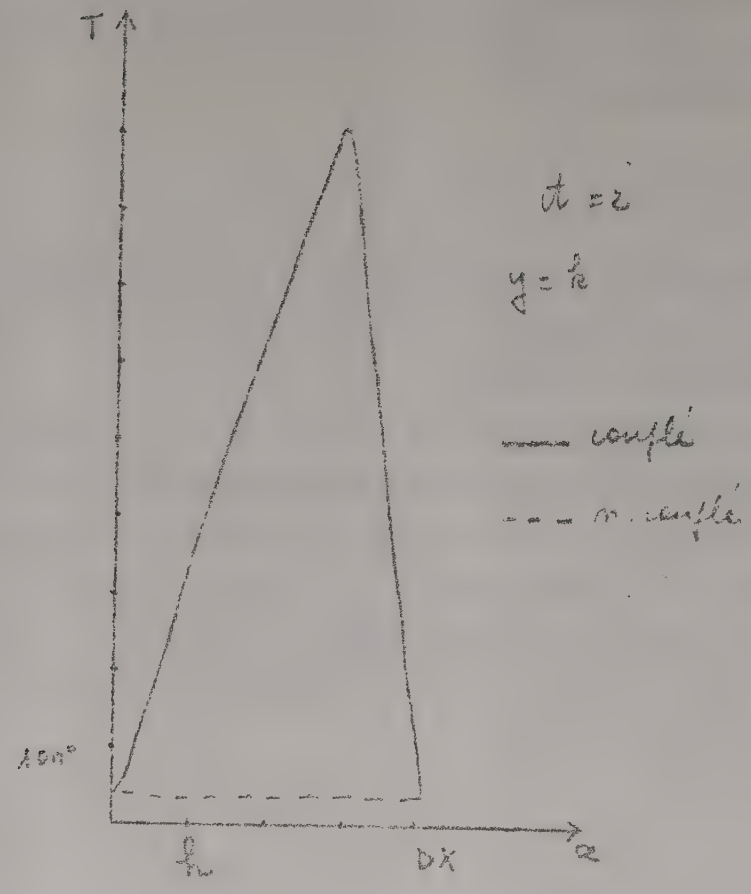


Figure 22



- Figure 23 -

Comme l'influence du couplage est nulle sur les composantes du déplacement donc sur les composantes du tenseur déformation, nous ne parlerons pas de ces dernières mais donnerons nos conclusions sur les composantes σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} du tenseur contrainte. Nous constatons que toutes les valeurs maximales des contraintes sont déportées sur Γ (ce qui est normal vu la grandeur des coefficients $A_{ij}^{(\alpha)}$). σ_{11} et σ_{22} ont des allures identiques avec toutefois des valeurs différentes mais dont les ordres de grandeur restent les mêmes.

Nous ne donnerons que les variations $\sigma_{11}(y)$ et $\sigma_{11}(x)$.

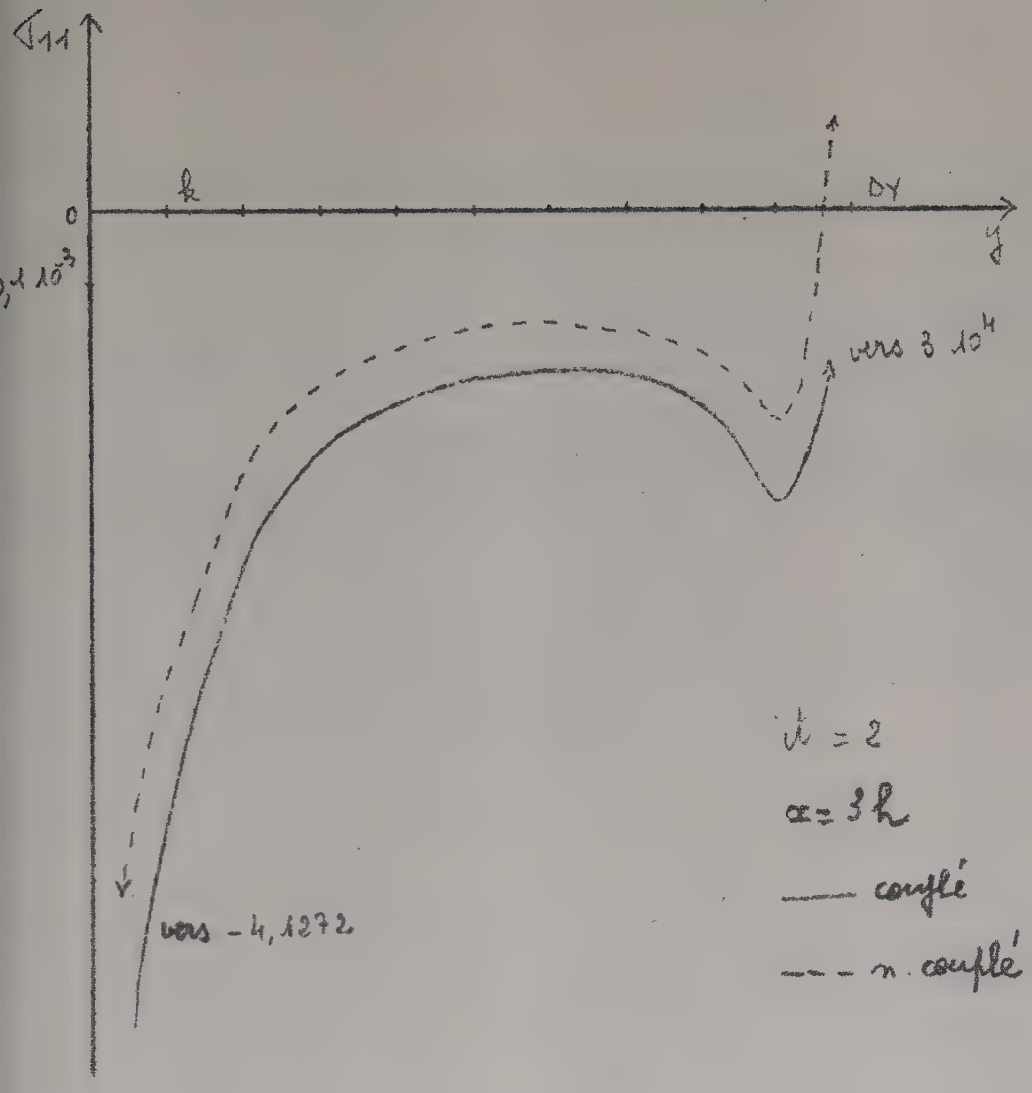


Figure 24

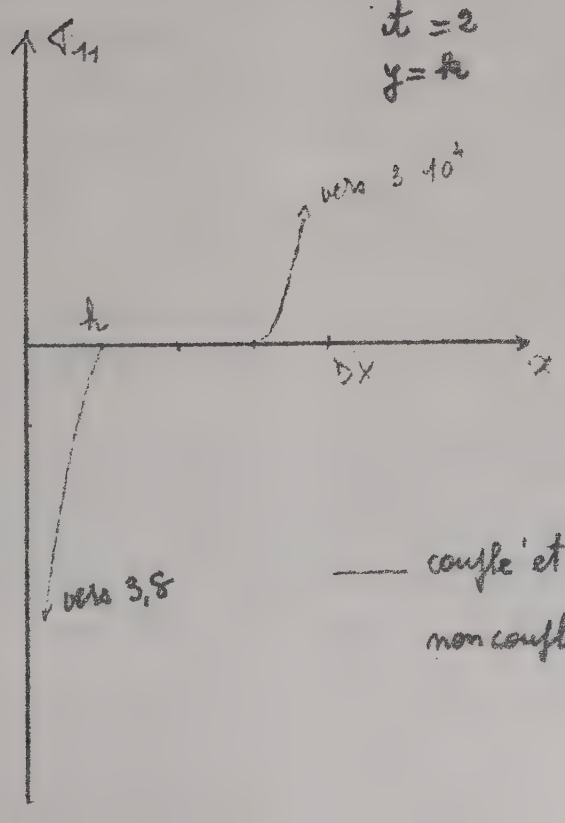


Figure 25

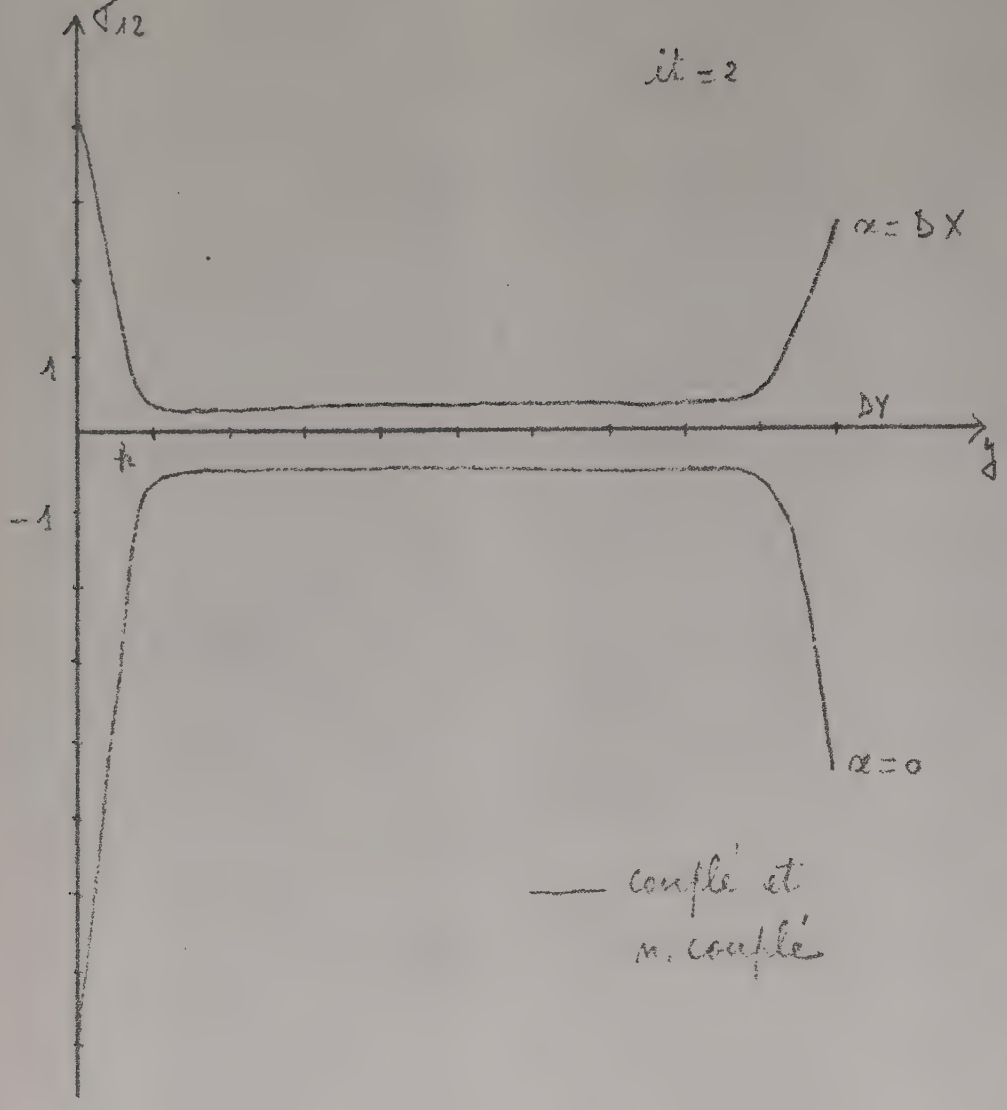


Figure 26

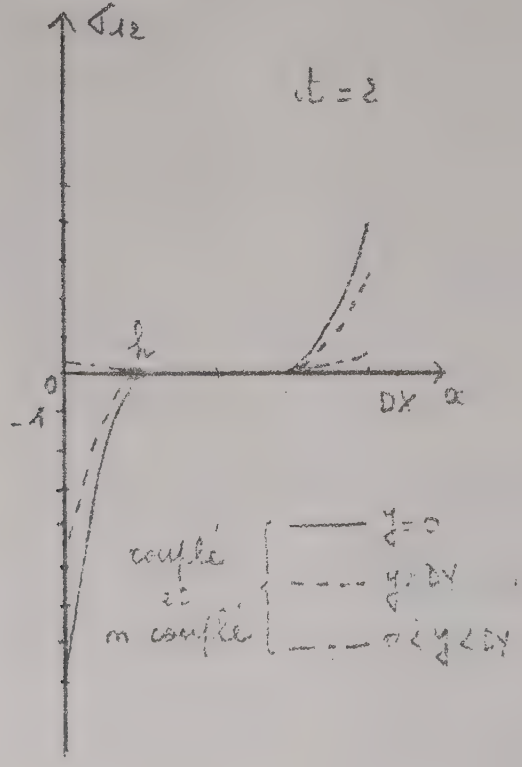


Figure 27

Les $\sigma_{12}(x, y)$ sont nuls dans D. Aux quatre coins de σ ils prennent leurs valeurs maximales (ordre de l'unité) restent de l'ordre de 10^{-2} sur les faces I et II nuls sur les faces III et IV de Γ.

$\sigma_{12}(x, y)$ étant proportionnel à $E_{12}(x, y)$ l'influence du couplage est nulle sur cette composante du tenseur contrainte.

Dans le dernier exemple, l'introduction du terme de couplage dans l'équation de conduction de la chaleur a encore apporté des faits nouveaux sur $\sigma(x, y)$, $\sigma_{11}(x, y)$ et $\sigma_{12}(x, y)$.

4.- Que faut-il conclure en ce qui nous concerne sur l'influence du couplage dans les problèmes thermoélastiques.

Notons tout d'abord une chose importante : les trois exemples numériques traités dépassent le cadre de la thermoélasticité linéaire en ce sens que les variations de température à partir de la température de référence sont grandes. Pour de faibles variations de T le couplage peut être négligé à priori. Les équations thermoélastiques linéaires couplées une fois posées (chapitre I) nous pouvons les utiliser pour l'étude numérique approximative d'un échauffement physique en accord avec la réalité, c'est-à-dire pour des variations de température assez importantes (exemples 1, 2 et 3). Pour le problème de Dirichlet, nous avons vu que l'introduction du terme de couplage n'apporte rien de nouveau hors des difficultés mathématiques. Dès que des dérivées normales des composantes du déplacement élémentaire, sont imposées sur les bords (données on vérifiait des relations linéaires) tout est différent.

De forts gradients de température apparaissent dans le matériau à la limite de la linéarité du problème. Ils sont accompagnés par de grandes contraintes dont les maximums sont localisés près des bords (exp. 2) ou sur les bords eux-mêmes (exp. 3).

Admettons que le problème thermoélastique réel n'est pas exactement décrit par les équations linéaires couplées. Il est un fait certain que seules ces équations et non celles où le couplage est négligé serrent de près le problème. Déjà des termes non linéaires en T sont omis dans l'équation de conduction. Si de plus on ne tient pas compte du couplage, l'erreur sera d'autant plus grande

et certains phénomènes que le couplage met en évidence seront cachés. On peut affirmer que les équations linéaires couplées donnent des résultats qui peuvent constituer une étape pour une étude du phénomène non linéaire. Elles peuvent fournir par exemple une expression approchée des contraintes qui mise en mémoire est nécessaire pour la connaissance de contraintes non linéaires par certaines méthodes. [28].

Les exemples numériques traités nous ont été suggérés par un problème de cristallographie. Il s'agissait d'étudier les répartitions des déformations et des contraintes dans une trichite de cuivre d'épaisseur négligeable, de largeur DX, de longueur DY soumis à un échauffement pouvant se représenter par les conditions aux limites thermiques des exemples (1), (2), et (3).

Quant aux conditions aux limites mécaniques, elles s'apparentent à celles du problème (3). Les variations de température sont importantes, le problème réel est donc probablement non linéaire.

L'expérience physique a mis en évidence [29] les déformations maximales des fibres de la plaque au point où le problème couplé fait apparaître le pic maximum de température. Ceci montre bien qu'on ne saurait négliger le terme de couplage dans de tels cas.

En définitive, on peut affirmer que si le couplage n'apparait que comme une curiosité mathématique dans le cas de faibles gradients de température, il n'en est pas de même pour les variations de température importantes ; dans ce cas là les problèmes du genre Neuman seront nettement différents selon qu'on tienne compte ou non des termes de couplage. C'est ce que nous a montré le calcul bidimentionnel de détermination des contraintes thermoélastiques dans une plaque. Cet état de chose méritait d'être vérifié, même si l'on pouvait se douter du résultat en considérant que le terme de couplage n'est qu'un premier terme du développement en série de Taylor.

Nous allons maintenant reprendre le problème théorique évoqué au paragraphe III. Nous montrerons que la suite des solutions approchées obtenues pour des réseaux de plus en plus fins, forme bien une suite convergente lorsque les conditions de stabilité sont satisfaites et que la limite de cette suite est bien solution exacte du problème différentiel I.

Déduisant ainsi de la méthode des différences finies un théorème d'existence des solutions des équations de la thermoélasticité couplée dans l'espace des fonctions continues.

Pour plus de simplification ce théorème est donné pour un milieu homogène, isotrope, à une dimension.

°°°

IV.- UTILISATION DES CONDITIONS DE STABILITE.

Si la condition (i) de la page 32 est satisfaite, nous pouvons écrire pour chaque phase de temps :

$$|\epsilon_T m, n ; p| \leq |\epsilon_T m, n ; o| + |\epsilon_T^P m, n ; p|$$

où $|a|$ représente la valeur absolue de a et $\epsilon_T^P m, n ; p$ une solution particulière de la troisième équation du système III.

Pour $\epsilon_{ui} m, n ; p$ $(i = 1, 2)$ nous obtenons des relations identiques. Si nous utilisons la norme de la convergence uniforme, nous aurons :

$$\|\epsilon_o\| = \sup_{mh \leq l} |\epsilon m, n ; o|$$

$$\|\epsilon^P\| = \frac{\sup |\epsilon^P m, n ; p|}{p . p\ell}$$

$$mh \leq l$$

$$p . p\ell \in [o, \mathcal{C}]$$

$[o , \mathcal{C}]$ intervalle temps fini et par suite :

$$\|\epsilon_T\| \leq C_1 \|\epsilon_o\| + \mathcal{C} \|\epsilon^P\|$$

C_1 constante strictement positive.

Pour $\|\epsilon_{u_i}\|$ nous obtenons des relations analogues. ϵ_T et ϵ_{u_i} suivent les mêmes évolutions en fonction du temps que Θ et u_i avec des solutions particulières différentes. En effet leurs parties transitoires obéissent aux mêmes équations (système III avec second membre nul). Donc si la condition de stabilité est satisfaite nous pourrons écrire :

$$\|T\| \leq C_2 \|\Phi^{(2)}\| + \mathcal{C} \|T^P\|$$

$$\|u_i\| \leq C_3 \|\Psi_i^{(2)}\| + \mathcal{C} \|u_i^P\|$$

C_2 et C_3 sont des constantes positives.

$$\Phi^{(2)}(x) = T(x,0) \qquad x = (x_1, x_2, \ldots)$$

$$\Psi^{(2)}(x) = u_i(x,0)$$

Ces conditions initiales étant de classe C^2, c'est-à-dire continues ainsi que leurs dérivées première et seconde.

°°°

V.- EXISTENCE D'UNE SOLUTION DU SYSTEME D'EQUATION AUX DERIVEES PARTIELLES SUIVANT DANS L'ESPACE DES FONCTIONS CONTINUES.

Cas d'un milieu homogène isotrope à une dimension.

On considère le système différentiel suivant :

$$\text{I} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \text{avec} \quad a = \dfrac{\alpha(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \\ \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \dfrac{1}{K^*} \dfrac{\partial \theta}{\partial t} + g \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial t} & g = \dfrac{\alpha T_o (3\lambda + 2\mu)}{K} \\ x \in [0 , \infty [\qquad t \in [0, T] \end{cases}$$

où toutes les constantes ont la signification indiquée au I et où θ représente les variations de température à partir de la température de référence T_o.

$$U(x, 0) = \Psi^{(2)}(x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = \Psi^{(3)}(x)$$

$$\theta(x, 0) = \phi^{(2)}(x)$$

les fonctions

$$\Psi^{(2)}(x) , \ \Psi^{(3)}(x) , \ \phi^{(2)}(x)$$

sont bornés en norme, avec la norme de la convergence uniforme.

Nous voulons montrer que le système ainsi posé admet une solution exacte. Pour cela nous allons voir que sous certaines conditions les solutions numériques obtenues par la méthode des différences finies dans le cas d'un réseau stable, convergent et que leur limite est bien solution exacte du système I.

1.- Problème aux différences finies.

- h_o étant fixé comme pas du réseau suivant l'axe des x, la condition de stabilité (i) page 32 donne :

$$p\ell_o = F[b, h_o]$$

- Notons :

$$U(x, t\ ;\ h_o) = U_{ho}(x, t)$$

$$\theta(x, t\ ;\ h_o) = \theta_{ho}(x, t)$$

$$\Delta_x U_{ho}(x, t) = [U_{ho}(x + h_o, t) - U_{ho}(x, t)]\ h_o^{-1}$$

$$\Delta_t U_{ho}(x, t) = [U_{ho}(x, t + p\ell_o) - U_{ho}(X, t)]p\ell_o^{-1}$$

Avec ces notations le système I devient :

$$\begin{cases} \Delta^2_{tt}\ U_{ho}(X, t) = \Delta^2_{xx}\ U_{ho}(x, t) + a\ \Delta_x\ \theta_{ho}(x, t) \\ \Delta^2_{xx}\ \theta_{ho}(x, t) = \Delta_t\ \theta_{ho}(x - h_o,\ t) + g\ \Delta^2_{xt}\ U_{ho}(x, t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{ho}(x, 0) = \Psi^{(2)}(x) \\ \Delta_t\ U_{ho}(x, 0) = \Psi^{(3)}(x) \\ \theta_{ho}(x, 0) = \phi^{(2)}(x) \end{cases}$$

2.- Quelques conditions à démontrer.

Le paragraphe IV montre que pour un réseau stable nous pouvons écrire :

$$\|U_{ho}\| \leq C_3\|\Psi^{(2)}\| \quad \text{et} \quad \|\theta_{ho}\| \leq C_2\|\phi^{(2)}\|$$

où

$$\|U_{ho}\| = \sup |U_{ho}(x,t)|$$

est la norme de la convergence uniforme.

Nous avions vu que si :

$$\Psi^{(2)}(x) \quad \text{et} \quad \phi^{(2)}(x)$$

sont bornés, alors U_{ho} et θ_{ho} sont équibornés par rapport à h_o. Voyons ce qu'il advient des $\Delta_x^n U_{ho}$. $n = 1, 2$

a) $\Delta_x U_{ho}(x,t)$, $\Delta_x \theta_{ho}(x,t)$ sont équibornés :

Posons :

$$\Delta_x U_{ho}(x,t) = P_{ho}(x,t)$$

$$\Delta_x \theta_{ho}(x,t) = Q_{ho}(x,t)$$

$P_{ho}(x,t)$ et $Q_{ho}(x,t)$ vérifient le système III suivant :

$$\text{III} \quad \begin{cases} \Delta^2_{tt} P_{ho}(x,t) = \Delta^2_{xx} P_{ho}(x,t) + a\Delta x\, q_{ho}(x,t) \\ \Delta^2_{xx} Q_{ho}(x,t) = \Delta_t Q_{ho}(x - h_o, t) + g\Delta^2_{xt} P_{ho}(x,t) \\ \Delta_t P_{ho}(x,0) = \Delta_x \Psi^{(3)}(x) \\ Q_{ho}(x,0) = \Delta_x \phi^{(2)}(x) \\ P_{ho}(x,0) = \Delta_x \Psi^{(2)}(x) \end{cases}$$

Le système III est de la même forme que le système II, donc si ho et $p\ell_o$ vérifient les conditions de stabilité et si $\Delta_x \Psi^{(2)}(x)$ et $\Delta_x \phi^{(2)}(x)$ sont bornés, alors $\Delta_x U_{ho}(x,t)$ et $\Delta_x \theta_{ho}(x,t)$ sont équibornés par rapport à h_o.

b) $\Delta^2_{xx} U_{ho}(x,t)$, $\Delta^2_{xx} \theta_{ho}(x,t)$ équibornés par rapport à h_o :

On montre comme précédemment que :

$\Delta^2_{xx} \Psi^{(2)}(x)$ et $\Delta^2_{xx} \phi^{(2)}(x)$ bornés $\Rightarrow$

$\Delta^2_{xx} U_{ho}(x,t)$ et $\Delta^2_{xx} \phi_{ho}(x,t)$ équibornés

par rapport à h_o (c'est-à-dire bornés par une constante indépendante de h_o).

c) $\Delta_t U_{ho}(x,t)$, $\Delta_t \theta_{ho}(x,t)$, $\Delta^2_{xt} U_{ho}(x,t$, $\Delta^2_{xt} \theta_{ho}(x,t)$ équibornés :

Toujours par un raisonnement analogue, on montre que :

$\phi^{(2)}(x)$, $\Psi^{(2)}(x)$, $\Delta_x \phi^{(2)}(x)$, $\Delta_x \Psi^{(2)}(x)$ bornés $\Rightarrow$

$\Delta_t U_{ho}(x,t)$, $\Delta_t \theta_{ho}(x,t)$, $\Delta^2_{xt} U_{ho}(x,t)$, $\Delta^2_{xt} \theta_{ho}(x,t)$

équibornés par rapport à h_o.

3.- $U_{hn}(x,t)$ et $\theta_{hn}(x,t)$ convergent dans $R^+ \times 0, T$ quand $h_n \to 0$.

a) Choix de réseaux stables de plus en plus fins :

Soit h_o et ℓ_o satisfaisant les conditions de stabilité ; considérons une suite de réseaux Z_p dont les côtés sont :

$$h_p = \frac{h_o}{2^p} \quad \text{et} \quad p\ell_p = \frac{p\ell_o}{2^{2p}} \qquad p \geq 0$$

h_p et $p\ell_p$ vérifient aussi les conditions.

Posons :

$$Z_\infty = \bigcup_{p=0}^{\infty} Z_p$$

. les Z_p sont emboîtés $Z_{p-1} \subset Z_p$

. Z_∞ est un ensemble de points à coordonnées rationnelles $Z_\infty \subset (0, T)_{rat} \times Q$ avec $(0, T)_{rat}$ ensemble des rationnels de $(0, T)$ Q ensemble des rationnels de $[0 + \infty]$.

Notons :

$$\widehat{\mathbb{R}} = (0, T) \times [0, +\infty]$$

$$(x, t) \in Z_\infty \Leftrightarrow X = q \frac{h_o}{2^p} \qquad t = s \frac{\ell_o}{2^{2p}}$$

q et s non négatif.

. Z_∞ est dénombrable,
. Z_∞ est dense dans $\widehat{\mathbb{R}}$
. $\forall (x, t) \in Z_\infty \; \forall N$ tel que $(x, t) \in Z_p$ pour $p \geq N$ donc pour lequel on puisse définir $U_{hn}(X, t)$ et $\theta_{hn}(x, t)$

b) $U_{hn}(x, t)$ et $\theta_{hn}(x, t)$ convergent dans $\widehat{\mathbb{R}}$.

Puisque Z_∞ est dénombrable, notons :

$$Z_\infty = \{(x, t)_k\} \qquad k = 1, 2 \ldots$$

Soit $U_{hn}(x, t)$ et $\theta_{hn}(x, t)$ deux ensembles donnés de fonctions définies $\forall (x, t) \in Z_\infty$ et considérons deux ensembles dénombrables de fonctions :

$$U_{h\nu}(x, t) \in \overline{U_{hn}(x, t)}$$

et

$$\theta_{h\nu}(x, t) \in \overline{\theta_{hn}(x, t)} \quad \text{avec } \nu = 1, 2 \ldots$$

Les fonctions : $U_{h\nu}(x, t)_1$ sont des fonctions à valeurs numériques bornées dans leur ensemble donc elles appartiennent à un compact et admettent au moins un point d'accumulation soit $V_\infty(x, t)_1$ et l'on peut en extraire une sous suite convergente que l'on note :

$\{U_{hn,\,1}(x, t)\}$ telle que $U_{hn,\,1}(x, t)_1 \to V_\infty(x, t)_1$ et l'on peut en extraire une suite :

$\{U_{hn,\,2}(x, t)\}$ telle que $U_{hn,\,2}(x, t)_2 \to V(x, t)_2$

et ainsi de suite ; ayant défini la suite $\{U_{hn,\,k}(x, t)\}$ telle que :

$$U_{hn,k}(x,t)_k \to V_\infty(x,t)_k$$

on en extrait une suite $\{U_{hn,k+1}(x,t\}$ telle que

$$U_{hn,k+1}(x,t)_{k+1} \to V_\infty(x,t)_{K+1}$$

quand $n \to \infty$.

On obtient ainsi un tableau :

$U_{h1,1}(x,t)$ $U_{h2,1}(x,t)$ ..... $U_{hm,1}(x,t)$ ....

$U_{h1,2}(x,t)$ $U_{h2,2}(x,t)$ ..... $U_{hm,2}(x,t)$ ....

.

.

$U_{h1,k}(x,t)$ $U_{h2,k}(x,t)$ ..... $U_{hm,k}(x,t)$ ....

où les fonctions figurant dans une ligne sont extraites de la ligne précédente.

Considérons la suite diagonale : $\{U_{hm,m}(x,t)\}$ elle est telle que l'on ait :

$$\lim U_{hm,m}(x,t)_k = V_\infty(x,t)_k$$

quand $m \to \infty$.

$$\forall\ (x,t)_k \in Z_\infty$$

Par le même procédé on montre que :

$$\lim \theta_{hm,m}(x,t)_k = V_\infty(x,t)_k$$

$$\forall\ (x,t)_k \in Z_\infty$$

soient (x_1, t) et (x_2, t) deux points de Z_∞ ; pour m assez grand nous pouvons définir :

$$U_{hm,m}(x_1,t)\ ,\ U_{hm,m}(x_2,t)\ ,\ \Theta_{hm,m}(x_1,t) \text{ et } \Theta_{hm,m}(x_2,t)$$

puisque

$$\forall\ (x,t) \in Z_\infty\ ,\ \Delta_x\, U_{hm,m}(x,t) \text{ et } \Delta_x\, \Theta_{hm,m}(x,t)$$

sont équibornés par rapport à hm nous avons :

$$|U_{hm,m}(x_1,t) - U_{hm,m}(x_2,t)| < 0\ |x_1 - x_2|$$

soit lorsque $m \to \infty$:

$$|V_\infty(x_1,t) - V_\infty(x_2,t)| \leq 0\ |x_1 - x_2|$$

soit lorsque $m \to \infty$:

$$|V_\infty(x_1,t) - V_\infty(x_2,t)| \leq 0\ |x_1 - x_2| \text{ dans } Z_\infty$$

de la même manière :

$$|W_\infty(x_1,t) - W_\infty(x_2,t)| \leq 0'|x_1 - x_2| \text{ dans } Z_\infty.$$

si (x,t_1) et $(x,t_2) \in Z_\infty$ nous aurons aussi puisque $\Delta_t U_{hm,m}(x,t)$ et $\Delta_t \Theta_{hm,m}(x,t)$ sont équibornés :

$$|V_\infty(x,t_1) - V_\infty(x,t_2)| \leq 0''|t_1 - t_2|$$

et

$$|W_\infty(x,t_1) - W_\infty(x,t_2)| \leq 0'''|t_1 - t_2|$$

donc nous déduisons de ces relations que, $V_\infty(\lambda,t)$ et $W_\infty(x,t)$ sont équicontinues dans Z, et qui plus est équilipschitziennes ; il est possible alors de prolonger par continuité $V_\infty(x,t)$ et $W_\infty(x,t)$ dans $\mathbb{R}$ tout entier, en deux fonctions que l'on note V(x,t) et W(x,t) de classe C° dans $\mathbb{R}$.

4. - $\Delta_x U_{hm,m}(x,t)$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Dans Z_∞ nous avons :

$$\Delta^2_{xx} U_{hm,m}(x_1,t) = \frac{\Delta_x U_{hm,m}(x_2,t) - \Delta_x U_{hm,m}(x_1,t)}{x_2 - x_1}$$

puisque $\Delta^2_{xx} U_{hm,m}(x_1,t)$ est équiborné nous pouvons écrire :

$$\frac{U_{hm,m}(x_2,t) - U_{hm,m}(x_1,t)}{x_2 - x_1} = \Delta_x U_{hm,m}(x_1,t) + 0^{IV}(x_2 - x_1)$$

pour m assez grand. Lorsque $m \to \infty$, le premier membre a une limite donc le deuxième membre aussi et puisque $\Delta_x U_{hm,m}(x_1,t)$ ne dépend pas de x_2, nous aurons pour $x_2 \to x_1$.

$$\lim_{m \to \infty} \Delta_x U_{hm,m} U(x_1,t) = S_\infty(x_1,t)$$

qui existe $\forall \ (x_1,t) \in Z_\infty$

Puisque :

$$\Delta^2_{xx} U_{hm,m}(x,t) \qquad \text{et} \qquad \Delta^2_{xt} U_{hm,m}(x,t)$$

sont équibornés, nous pouvons montrer comme au paragraphe précédent que $S_\infty(x,t)$ est équilipschitziennens par rapport à x et à t dans Z_∞, donc on peut prolonger $S_\infty(x,t)$ par continuité dans $\overline{\mathbb{R}}$ tout entier en une fonction continue $S(x,t)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

5. - Il reste à montrer que $S(x,t) = \frac{\partial V}{\partial x}(x,t)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Nous avions :

$$\frac{U_{hm,m}(x_2,t) - U_{hm,m}(x_1,t)}{x_2 - x_1} = \Delta_x U_{hm,m}(x_1,t) + 0^{IV}(x_2 - x_1)$$

pour $m \to \infty$ nous aurons donc :

$$\frac{V_\infty(x_2, t) - V_\infty(x_1, t)}{x_2 - x_1} = S_\infty(x_1, t) + 0^{IV}(x_2 - x_1)$$

nous avons vu que puisque $S_\infty(x, t)$ et $\mathcal{E}_\infty(x, t)$ sont continus dans Z_∞, cette même relation est valable dans $\mathbb{R}$. Pour $x_2 \to x_1$ nous aurons donc :

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{V(x_2, t) - V(x_1, t)}{x_2 - x_1} = S(x_1, t) \quad \text{dans } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x}(x_1, t) = S(x_1, t) \quad \text{dans } \mathbb{R} .$$

un raisonnement analogue permet de montrer

- que $\lim_{m \to \infty} \Delta_x \theta_{hm, m}(x, t) = \mathcal{E}_\infty(x, t)$ dans Z_∞

- que $\Delta^2_{xx} \theta_{hm, m}(x, t)$ et $\Delta^2_{x, t} \theta_{hm, m}(x, t)$ étant équibornés on a : $\mathcal{E}_\infty(x, t)$ continu dans Z_∞ donc $\mathcal{E}(x, t)$ son prolongement par continuité existe et est de classe C° dans $\mathbb{R}$.

- et que :

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial x} = \mathcal{E}(x, t) \text{ dans } \mathbb{R} .$$

6.- Théorème d'existence.

Faisons le même raisonnement que précédemment aux dérivées d'ordre supérieure. Par exemple :

$$\left.\begin{matrix} \psi^{(2)}(x) \\ \phi^{(2)} x \end{matrix}\right\} \text{ de classe } C^3 \Rightarrow \begin{cases} \Delta^3_{xxx} U_{hm}(x, t) \\ \Delta^3_{xxt} U_{hm}(x, t) \end{cases} \text{ équibornés par rapport à } h_m$$

$$\Rightarrow \Delta^2_{xx} U_{hm, m}(x, t) \to \chi_\infty(x, t) \quad \text{dans } Z_\infty$$

et que $\chi_\infty(x, t)$ peut être prolongé par continuité dans $\overline{\mathbb{R}}$ en $\chi(x, t)$ qui est de classe C° dans $\overline{\mathbb{R}}$ et que de plus :

$$\chi(x, t) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \text{dans } \overline{\mathbb{R}} .$$

On opère ainsi pour tous les termes du système II et on obtient le théorème suivant; en tenant compte du fait que $\phi^{(2)}(x)$ et $\psi^{(2)}(x)$ sont de classe C^2.

Théorème :

Le système I adment au moins une solution de classe C^2 dans $\overline{\mathbb{R}}$ si les conditions initiales : $U(x, 0)$ et $\theta(x, 0)$ sont de classe C^3 dans $\overline{\mathbb{R}}$. et si :

$\frac{\partial U}{\partial t}(x, 0)$

est de classe C^4 dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Remarque sur l'unité de la solution.

Si :

$$\begin{cases} U'(x, t) & \text{et} \quad \begin{cases} U(x, t) \\ \theta(x, t) \end{cases} \\ \theta'(x, t) & \text{et} \end{cases}$$

sont deux solutions du système I déterminées par la méthode des différences finies, nous pouvons remarquer que :

$$\begin{cases} y(x, t) = U'(x, t) - U(x, t) \\ \varepsilon(x, t) = \theta'(x, t) - \theta(x, t) \end{cases}$$

satisfait à un système analogue à I avec les conditions initiales suivantes :

$$y(x, 0) = 0 \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$$

$$\varepsilon(x, 0) = 0$$

si les conditions de stabilité sont satisfaites, nous pouvons donc écrire :

$$\|Y\| \leq 0$$

$$\|\varepsilon\| \leq 0$$

ce qui montre bien que $Y(x, t) = \varepsilon(x, t) = 0$ dans $\overline{\Pi}$.

CHAPITRE IV

A la fin du chapitre III nous donnons un théorème d'existence pour les équations thermoélastiques couplées dans l'espace des fonctions continues. Nous avons vu que ce théorème exige des conditions assez restrictives sur les solutions et leurs dérivées successives.

Ici nous reprenons le système différentiel dans un cadre plus général. En effet, nous montrerons comment un problème de thermoélasticité couplé pour lequel les données ne sont pas forcément régulièrespeut être "bien posé" c'est-à-dire admettre des solutions dont nous préciserons l'appartenance.

Pour cela nous donnons une formulation nouvelle du problème dans le cadre de la théorie hilbertienne. La construction des solutions approchées par des structures dites "externes" (méthode des différences finies sous forme variationnelle) existe et présente de multiples applications. Néanmoins nous n'en parlerons pas ici, nous bornant à faire une extension théorique simple des pages précédentes.

I.- RAPPELS.

1.- Quelques espaces fonctionnels.

. $L^2(\Omega)$.

Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$, $L^2(\Omega)$ est l'espace des classes de fonctions de carré sommable sur Ω pour la mesure $dx = dx_1 \ldots dx_n$. C'est un espace vectoriel.

La norme :

$$|u| = (u, u)^{1/2} = \left[\int_\Omega u\,\bar{u}\,dx\right]^{1/2}$$

en fait un espace de Hilbert.

. $H^1(\Omega)$.

C'est l'espace des u appartenant à $L^2(\Omega)$ dont les dérivées au sens des distributions $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ appartiennent aussi à $L^2(\Omega)$. Pour $u \in H^1(\Omega)$ on prendra la norme :

$$\|u\| = |u| + \left[\int_\Omega \frac{du}{\partial u_i}\,\overline{\frac{\partial u}{\partial u_i}}\,dx\right]^{1/2}$$

elle munit $H^1(\Omega)$ d'une structure hilbertienne.

. $\mathcal{L}(V\,;\,V)$.

C'est l'espace des applications linéaires continues définies sur V, à valeurs dans V.

. $L^2(0,t\,;\,H^1(\Omega))$.

u appartient à $L^2(0,t\,;\,H^1(\Omega))$, si u est défini sur $[0,t]$ à valeurs dans $H^1(\Omega)$.

La norme :

$$|||u||| = \left[\int_0^t \|u\|^2 d\tau\right]^{1/2}$$

en fait un espace de Hilbert.

2.- Forme sesquilinéaire.

A tout opérateur A appartenant à $\mathcal{L}(V ; V)$ où V est un espace de Hilbert, on peut associer une forme sesquilinéaire a(u, v) continue sur V, c'est-à-dire une application : $u, v \to a(u, v)$ de VXV dans C (corps des complexes), linéaire en u, anti-linéaire en v avec :

$$|a(u, v)| \leq C_1 \|u\| \, \|v\| \qquad C_1 = \text{constante}$$

et telle que l'on peut écrire :

$$a(u, v) = (\ u, v)$$

3.- Solution généralisée.

A un opérateur différentiel nous associons donc une forme sesquilinéaire. Le problème est ainsi mis sous la forme dite variationnelle. Nous définirons les solutions généralisées sur un exemple.

Soit V un espace de Hilbert, il s'agit de déterminer une fonction u telle que :

$$(1) \qquad Au + \frac{du}{dt} = f \qquad u(0) = u_o$$

Ce problème est équivalent au suivant : trouver $u \in V$ tel que :

$$(2) \qquad a(u, v) + \left(\frac{du}{dt}\ ,\ v\right) = (f, v)$$

$$\forall\, v \in V$$

à ce moment là u est dit solution généralisée du problème (1).

Toute solution de (1) vérifie le problème (2) mais la réciproque n'est pas vraie en général.

4.- Théorème des projections.

Nous mettrons donc un problème thermoélastique sous forme variationnelle, il s'agira alors de démontrer l'existence de "solutions généralisées". Pour cela nous appliquerons le critère d'existence énoncé comme suit :

Soit F un espace de Hilbert. Si u et v $\in$ F on désignera par $(u, v)_F$ le produit scalaire de u et v, et on posera

$$\|u\|_F = (u, u)_F^{1/2}$$

la norme dans F.

Soit l'espace pré-hilbertien $\Phi \subset F$, on suppose que Φ est muni du produit scalaire $(((\varphi, \Psi)))$ $\varphi, \Psi \in \Phi$. Soit $|||\varphi||| = (((\varphi, \varphi)))^{1/2}$ la norme correspondante.

On suppose que : $\|\varphi\|_F < C_1 |||\varphi|||$ $\forall$ $\varphi \in \Phi$ où C_1 est une constante.

On donne une forme sesquilinéaire $E(u, \varphi)$ telle que :

. $F_x \Phi \xrightarrow{E} E(u, \varphi) \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$)

. $\forall$ $\varphi \in \Phi$ $E(u, \varphi)$ est continue sur F

c'est-à-dire qu'il existe la relation suivante :

$$\forall u \in F \quad |E(u, \varphi)| < K_\varphi \|u\|_F$$

où K_φ ne dépend que de φ.

. $\exists$ α une constante > 0 telle que

$$|E(\varphi, \varphi)| > \alpha |||\varphi|||^2$$

Théorème.

Sous les hypothèse ci-dessus, si $\mathcal{L}(\varphi)$ est une forme sesquilinéaire continue sur Φ, alors $\exists$ $u \in F$ tel que :

$$E(u, \varphi) = \mathcal{L}(\varphi) \qquad \forall \ \varphi \in \Phi$$

II.- APPLICATIONS AUX EQUATIONS DE LA THERMOELASTICITE COUPLEE.

1.- Problème de Dirichlet pour un milieu homogène, isotrope à une dimension.

Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}$, Γ sa frontière. Prenons $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ deux espaces de Hilbert séparables. Nous avons :

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

avec :

$$\|v\| \geq C_1 \, |v| \qquad \forall \quad v \in H^1(\Omega)$$

suivant les notations du paragraphe I.

C_1 est une constante ≥ 0.

Considérons le système différentiel suivant :

$$I \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = f(x,t) & (1) \\ \dfrac{1}{K^*} \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + g \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial t} = q(x,t) & (2) \end{cases}$$

$$t \in [0, T] \qquad g = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha T_0}{K}$$

$$a = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha \qquad \frac{K}{K^*} = \rho C$$

où toutes ces constantes ont les significations de l'exemple donné au chapitre III.

$f(x,t)$ et $q(x,t)$ appartiennent à $L^2(0, T \, . \, L^2(\Omega))$

Conditions initiales :

$$u(x,0) = \theta(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$$

Conditions aux limites :

$$x \in \Gamma \qquad u(x,t) = \theta(x,t) = 0$$

ce qui revient au même de prendre $H_o^1(\Omega)$ au lieu de $H^1(\Omega)$.

Il s'agit de trouver $u(x,t)$ et $\theta(x,t) \in L^2(0, T ; H_o^1(\Omega))$ avec :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \in L^2(0, T ; L^2(\Omega))$$

Pour cela nous associons au problème I la forme sesquilinéaire $\mathcal{L}(\phi, \chi)$ avec :

$$\chi = \langle u, \theta \rangle \qquad \phi = \langle v, w \rangle$$

telle que :

$$(3) \qquad \mathcal{L}(\chi, \phi) = (\ddot{u}, \dot{v}) - (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dot{v}) + a(\frac{\partial \theta}{\partial x}, \dot{v}) + \frac{1}{K^*}(\dot{\theta}, W) - (\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, w) + g(\frac{\dot{\partial u}}{\partial x}, W)$$

où les points désignent des dérivées par rapport au temps.

u et θ satisfont alors au problème II.

$$\text{II} \qquad \mathcal{L}(\chi, \phi) = (f, \bar{v}) + (q, W)$$

$$\forall \chi \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$$

Nous appliquerons le théorème des projections suivant une technique due à Trèves [11].

α) Changeons u en $e^{kt}u$ et θ en $\theta\, e^{kt}$ k réel quelconque.

u devient $\dot{u}\, e^{kt} + k u e^{kt}$,
$\ddot{u}$ devient $\ddot{u}\, e^{kt} + 2k\dot{u}e^{kt} + k^2 u e^{kt}$

Le problème II est alors remplacé par III :

$$\text{III} \quad \left\{ \begin{array}{l} [(\ddot{u}, \dot{v}) + ((k^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2})u, \dot{v}) + a(\frac{\partial \theta}{\partial x}, \dot{v}) + \frac{1}{K^*}(\dot{\theta}, W) + ((k - \frac{\partial^2}{\partial x^2})\theta, W) \\ \qquad + g(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}, W)] + 2k(\dot{u}, \dot{v}) + gk(\frac{\partial u}{\partial x}, W) = e^{-kt}[(f, \dot{v}) + (q, W)] \end{array} \right.$$

Grâce aux propriétés d'hermiticité et de coercivité des opérateurs elliptique (ici $-\frac{\partial}{\partial x}$), on choisit k pour que l'on ait :

$$\left. \begin{array}{l} ((k^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2})u, u) \geq \alpha_1 \|u\|^2 \\ \\ ((k - \frac{\partial^2}{\partial x^2})\theta, \theta) \geq \alpha_2 \|\theta\|^2 \end{array} \right\} \text{avec } \alpha_1 \text{ et } \alpha_2 > 0$$

β) Il est commode pour les intégrations qui suivent de se placer pour t sur la demi droite $[0, +\infty[$. Nous prendrons ensuite la restriction des solutions à $t \leq T$.

γ) Posons :

$$A = -\operatorname{Re}\int_0^{+\infty} (\dot{\varphi}, (e^{-2\gamma}\dot{\varphi})^{\cdot})dt$$

$$B = \operatorname{Re}\int_0^{+\infty} ((k^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2})\varphi\, e^{-\gamma t}, \dot{\varphi} e^{-\gamma t})dt$$

$$C = \operatorname{Re}\, a\int_0^{+\infty} (e^{-\gamma t}\frac{\partial \Psi}{\partial x}, e^{-\gamma t}\dot{\varphi})dt$$

$$D = \operatorname{Re}\int_0^{+\infty} \frac{1}{K^*}(e^{-\gamma t}\dot{\Psi}, e^{-\gamma t}\Psi)dt$$

$$E = \operatorname{Re}\int_0^{+\infty} ((k - \frac{\partial^2}{\partial x^2})\Psi\, e^{-\gamma t}, e^{-\gamma t}\Psi)dt$$

$$F = \operatorname{Re}\, g\int_0^{+\infty} (\frac{\partial}{\partial x}\dot{\varphi}\, e^{-\gamma t}\Psi\, e^{-\gamma t})dt$$

$$G = \mathrm{Re}\ 2k \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma t}\dot{\varphi}\ ,\ e^{-\gamma t}\dot{\varphi})dt$$

$$\bar{H} = \mathrm{Re}\ gk \int_0^{+\infty} (\frac{\partial \varphi}{\partial x}\ e^{-\gamma t}\ ,\ \Psi\, e^{-\gamma t})dt$$

Nous vérifions l'identité suivante :

$$(A + B + C + D + E + F + G + \bar{H}) \geq C_2 \left|\!\left|\!\left| \Psi \right|\!\right|\!\right|^2 \qquad (4)$$

pour $\gamma > 0$ assez grand et C_2 constante > 0. $\Psi = <\varphi, \Psi>$ où φ et Ψ sont des fonctions satisfaisant aux relations qui suivent :

$$e^{-\gamma t}\varphi \in L^2(0,\ +\infty\ ;\ H_0^1(\Omega)) \qquad e^{-\gamma t}\dot{\varphi} \in L^2(0,\ +\infty\ ;\ H^1(\Omega))$$

$$e^{-\gamma t}\ddot{\varphi} \in L^2(0,\ +\infty\ ;\ L^2(\Omega))$$

$$e^{-\gamma t}\Psi \in L^2(0,\ +\infty\ ;\ H_0^1(\Omega)) \qquad e^{-\gamma t}\dot{\Psi} \in L^2(0,\ +\infty\ ;\ H^1(\Omega))$$

$$e^{-\gamma t}\ddot{\Psi} \in L^2(0,\ +\infty\ ;\ L^2(\Omega)) \qquad \varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\varphi}(0) = \varphi_o$$

$$\Psi(0) = 0 \qquad \dot{\Psi}(0) = \Psi_o$$

Dans (4) nous avons :

$$(5) \qquad \left|\!\left|\!\left| \Psi \right|\!\right|\!\right|^2 = \int_0^{+\infty} (\|e^{-\gamma t}\varphi\|^2 + |e^{-\gamma t}\dot{\varphi}|^2 + \|\Psi e^{-\gamma t}\|^2)dt + |\dot{\varphi}_o|^2$$

Notons Z l'espace de Hilbert de norme (5) ; $\Psi \in Z$.

Pour obtenir (4) nous opérons terme à terme :

$$2A = -\int_0^{+\infty} (\dot{\varphi}, (e^{-2\gamma t}\dot{\varphi})^{\cdot})dt - \int_0^{+\infty} ((e^{-2\gamma t}\dot{\varphi})^{\cdot},\ \dot{\varphi})dt$$

$$= -\int_0^{+\infty} (\dot{\varphi},\ e^{-2\gamma t}\dot{\varphi})^{\cdot}\, dt + \int_0^{+\infty} (\ddot{\varphi}, e^{-2\gamma t}\dot{\varphi})dt - \int_0^{+\infty} (e^{-2\gamma t}\ddot{\varphi}, \dot{\varphi})dt$$

$$+ 2\gamma \int_0^{+\infty} (e^{-2\gamma t}\dot{\varphi}, \dot{\varphi})dt$$

$$2A = |\dot{\varphi}|_o^2 + 2\gamma \int_o^{+\infty} e^{-2\gamma t} |\dot{\varphi}|^2 \, dt$$

$$2B = 2 \int_o^{+\infty} e^{-2\gamma t} \left((k^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \varphi, \dot{\varphi} \right) dt$$

$$2B = \int_o^{+\infty} 2\gamma e^{-2\gamma t} \left((k^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \varphi, \varphi \right) dt \geq 2\gamma \alpha_1 \int_o^{+\infty} e^{-2\gamma t} \|\varphi\|^2 dt$$

$$2C = 2a \, \mathrm{Re} \int_o^{+\infty} e^{-2\gamma t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \dot{\varphi} \right) dt$$

Notons la valeur absolue de 2C = va(2C).

$$va(2C) \leq 2a \|\Psi\| \, |\dot{\varphi}|$$

$$2C \geq -2a \int_o^{+\infty} \|\Psi\| \, |\dot{\varphi}| \, e^{-2\gamma t} \, dt \geq -a \int_o^{+\infty} e^{-2\gamma t} \left(\|\Psi\|^2 + |\dot{\varphi}|^2 \right) dt$$

$$2C \geq -a \int_o^{+\infty} e^{-2\gamma t} \|\Psi\|^2 dt - a \int_o^{+\infty} e^{-2\gamma t} |\dot{\varphi}|^2 dt$$

$$2D = \frac{2}{K^*} \, \mathrm{Re} \int_o^{+\infty} e^{-2\gamma t} (\dot{\Psi}, \Psi) dt = \frac{1}{K^*} \int_o^{+\infty} e^{-2\gamma t} \frac{d}{dt} (\Psi, \Psi) dt$$

$$2D = \frac{2\gamma}{K^*} \int_o^{+\infty} e^{-2\gamma t} (\Psi, \Psi) dt$$

$$2E = 2 \int_o^{+\infty} e^{-2\gamma t} \left((k - \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \Psi, \Psi \right) dt$$

$$2(D + E) = 2 \int_o^{+\infty} e^{-2\gamma t} \left((\frac{\gamma}{K^*} + k - \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \Psi, \Psi \right) dt > 2\alpha_2 \int_o^{+\infty} e^{-2\gamma t} \|\Psi\|^2 dt$$

$$2F = 2\mathrm{Re} \, g \int_o^{+\infty} e^{-2\gamma t} \left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial x}, \Psi \right) dt$$

$$va(2f) \leq 2g\int_o^{+\infty} e^{-2\gamma t}\,|\dot{\varphi}|\,\|\psi\|dt$$

$$2F \geq -g\int_o^{+\infty} e^{-2\gamma t}\,|\dot{\varphi}|^2\,dt - g\int_o^{+\infty} e^{-2\gamma t}\,\|\psi\|^2\,dt$$

$$2G = 4k\,\mathrm{Re}\int_o^{+\infty} (\dot{\varphi}, \dot{\varphi})e^{-2\gamma t}dt$$

$$2G \geq -4k\int_o^{+\infty} e^{-2\gamma t}\,|\dot{\varphi}|^2dt$$

$$2H = 2\,\mathrm{Re}\,gk\int_o^{+\infty} e^{-2\gamma t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \psi\right)dt$$

$$2H \geq -gk\int_o^{+\infty} \|\varphi\|^2 e^{-2\gamma t}dt - gk\int_o^{+\infty} |\psi|^2 e^{-2\gamma t}dt$$

$$2H \geq -gh\int_o^{+\infty} \|\varphi\|^2 e^{-2\gamma t}dt - \frac{gk}{C_1}\int_o^{+\infty} \|\psi\|^2 e^{-2\gamma t}dt$$

On a donc :

$$2(A + B + C + D + E + F + \bar{H}) \geq \int_o^{+\infty} e^{-2\gamma t}[(2\gamma - a - g - 4k)|\dot{\varphi}|^2 +$$

$$(2\gamma\alpha_1 - gk)\|\varphi\|^2 + (2\alpha_2 - a - g - g\,\frac{k}{C_1})\,\|\psi\|^2]dt + |\dot{\varphi}_o|^2$$

La relation (4) est vérifiée pour γ assez grand avec :

$$C_2 = \inf \begin{cases} 1 \\ 2\gamma - a - g - 4k \\ 2\gamma\alpha_1 - gk \\ 2\alpha_2 - a - g - g\,\dfrac{k}{C_1} \end{cases}$$

Désignons maintenant par Y l'espace des fonctions telles que :

$$e^{-\gamma t}u \in L^2(0, +\infty ; H_o^1(\Omega)) \qquad e^{-\gamma t}\theta \in L^2(0, +\infty ; H_o^1(\Omega))$$

$$e^{-\gamma t}\dot{u} \in L^2(0, +\infty ; L^2(\Omega))$$

muni de la norme :

$$\|x\|_Y^2 = \int_o^{+\infty} (\|u e^{-\gamma t}\|^2 + |\dot{u} e^{-\gamma t}|^2 + \|\theta e^{-\gamma t}\|^2)dt$$

qui en fait un espace de Hilbert.

On a : Z C Y.

Pour appliquer le théorème des projections, nous allons montrer que la forme sesquilinéaire :

$$E(\chi, \phi) = \int_o^{+\infty} \mathcal{L}(\chi, \phi)dt$$

est continuesur Y c'est-à-dire qu'on a la relation :

$$va\ E(\chi\ \chi) \leq C_3\ \|x\|_Y^2 \qquad (6)$$

Pour démontrer (6) nous reprenons $E(\chi, \chi)$ terme à terme en appliquant plusieurs fois l'inégalité de Schwarz. Nous obtenons :

$$C_3 = \sup \begin{cases} \dfrac{k^2}{C_1} + 1 + \dfrac{gk}{2} + \dfrac{a}{2C_1} + 2k\dfrac{\gamma}{C_1} \\ \\ \dfrac{a}{2} + 1 + \dfrac{g}{2} + \dfrac{\gamma}{C_1} + \dfrac{k}{C_1} + \dfrac{gk}{2C_1} \end{cases}$$

Posons maintenant :

$$\mathcal{F}(\phi) = \int_o^{+\infty} [(e^{-\gamma t}f, e^{-\gamma t}\dot{v}) + (e^{-\gamma t}q, e^{-\gamma t}W)]dt$$

On est maintenant dans les conditions d'applications du théorème des projections donc il existe $\chi \in Z$ tel que :

$$E(\chi, \phi) = \mathfrak{F}(\phi) \quad \forall\, \phi \in Y$$

On vérifie facilement que la solution obtenue est bien solution du problème I. (Voir dans la démonstration de Trèves [11] le passage de la forme sesquilinéaire à la forme différentielle pour un choix astucieux de la fonction test ϕ : $\phi = \xi(t)\,\eta(x)$ $\quad \xi(t) = {}^{t}e^{2\gamma\sigma}\nu(\sigma)d\sigma$ $\quad \nu(\sigma) \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}})$ (espace des fonctions indéfiniment différentiable à support compact sur $\overline{\mathbb{R}}$).

$$\eta \in H_o^1(\Omega)$$

2.- Problème de Neumann pour un milieu homogène isotrope à une dimension.

La même démonstration qu'au n°1 reste valable avec H_o^1 remplacé par $H^1(\Omega)$ remplacé par $H_o^1(\Omega)$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ nuls sur Γ.

3.- Conditions aux limites de forme plus générale toujours pour un milieu homogène isotrope à une dimension.

Considérons la forme sesquilinéaire suivante :

$$\mathcal{L}^*(\chi, \phi) = (\dot{u}, \dot{u}) - (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dot{v}) + a(\frac{\partial \theta}{\partial x}, \dot{v}) + (\dot{\theta}, W) - (\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, W) + g(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}, W)$$

$$+ <\gamma_o u, \dot{v}> + <b_1 \dot{v}> + <\gamma_o^* \theta, W> + <b_2, W>$$

où les crochets désignent le produit scalaire sur Γ et $\gamma_o u$ = trace de u sur Γ, $\gamma_o^* \theta$ = trace de θ sur Γ

Pour maintenir $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}^*$ de manière à conserver la validité de la démonstration du numéro 1. Il faut que l'on ait :

$$\int_\Gamma (\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_o u + b_1)\, \overline{v}\, d\sigma = 0$$

et

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} + \gamma_o^* \theta + b_2\right) W \, d\sigma = 0$$

b_1 et b_2 sont des réels quelconques.

Ce qui rend valable la démontration de 1 pour des conditions aux limites de types mixtes dans le sens où elles sont des combinaisons linéaires de conditions de Dirichlet et de Neumann.

4.- Cas d'un milieu non homogène, anisotrope et de dimension n.

Le problème différentiel s'écrit :

$$\text{I} \quad \begin{cases} \rho(x) \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(B_{ijk\ell}(x) \dfrac{\partial u_k}{\partial x_\ell}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\beta_{ij}(x)\theta\right) = F_i(x,t) \\ C(x)\rho(x) \dfrac{\partial}{\partial t}\theta + T_o \beta_{ij}(x) \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(K_{ij}(x) \dfrac{\partial\theta}{\partial x_j}\right) + Q(x,t) \end{cases}$$

$i = 1, 2 \ldots n$ en pratique $n \leq 3$

$B_{ijk\ell}(x)$ est le tenseur d'élasticité,

$\beta_{ij}(x)$ est le tenseur de couplage entre les effets thermiques et mécaniques.

$K_{ij}(x)$ est le tenseur de conductibilité thermique entrant dans la loi de Fourier.

Ces expressions sont toutes mesurables au sens de Lebesgue. Les composantes de ces tenseurs sont bornées et non négatives. De plus :

$$\beta_{ij} = \beta_{ji} \quad \text{et} \quad B_{ijk\ell} = B_{jik\ell} = B_{k\ell ij}$$

A I nous associons la forme sesquilinéaire suivante dans laquelle nous omettons volontairement x pour simplifier l'écriture :

$$\mathcal{L}(\chi, \phi) = \left(\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \overset{*}{v}_i\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(B_{ijk\ell} \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell}\right), \overset{*}{v}_i\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\beta_{ij}\theta\right), \overset{*}{v}\right) +$$

$$\left(C\rho \frac{\partial\theta}{\partial t}, W\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij} \frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right), W\right) + \left(T_o \beta_{ij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial t}, W\right)$$

$\chi = \langle u_i, \theta \rangle \quad \phi = \langle v_i, W \rangle$

Après avoir changé u_i en $u_i e^{kt}$ et θ en θe^{kt} (k réel quelconque) nous obtenons :

$$\left[\left(\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \overset{*}{v}_i\right) + \left(\left(k^2\rho - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(B_{ijk\ell}\frac{\partial}{\partial x_\ell}\right)\right)u_k, \overset{*}{v}_i\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\beta_{ij}\theta), \overset{*}{v}_i\right)\right.$$

$$\left. + \left(C\rho\frac{\partial\theta}{\partial t}, W\right) + \left(\left(kC\rho - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)\theta, W\right) + \left(T_o\beta_{ij}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial t}, W\right)\right]$$

$$+ \left(2k\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}, \overset{*}{v}_i\right) + \left(T_o\beta_{ij}k\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, W\right) = e^{-kt}\left((f_i, \overset{*}{v}_i) + (q, W)\right)$$

Notons :

$$P = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(B_{ijk\ell}\frac{\partial}{\partial x_\ell}\right)$$

$$Q^* = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

P et Q^* sont hermitien. Il suffit de faire sur eux des hypothèses de coercitivité de $L^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ soit de supposer que :

$$((k^2\rho - P)u, u) \geq \alpha_2 \|u\|^2$$

et

$$((kC\rho - Q^*)\theta, \theta) \geq \alpha_4 \|\theta\|^2$$

α_3 et $\alpha_4 > 0$

Dans ce cas la démonstration du numéro 1 s'applique aisément.

Nous n'aborderons pas ici le problème de l'unicité des solutions en thermoélasticité couplée. En effet de nombreuses études ont été faites la dessus [1].

CONCLUSION GENERALE

L'influence de la forme des conditions aux limites sur l'effet du couplage en thermoélasticité a été mise en évidence pour des échauffements assez importants. Déjà l'exemple de Danilovskaya qui maintenait un échelon de température en fonction du temps à l'origine d'un milieu unidimensionnel semi-infini, le montrait.

La présence de dérivées normales sur les bords donne ici une place au terme de couplage. Les valeurs de T imposées à la frontière ne pouvant être modifiées, de forts gradients de température interviennent près des bords, accentuant les répartitions des contraintes.

Dans de tels cas, on ne saurait plus considérer ce terme comme une curiosité mathématique mais comme un facteur d'accélération ou d'amortissement non négligeable et seul capable d'expliquer certains phénomènes réels. C'est ce que notre exemple bidimensionnel traité numériquement a mis en évidence de façon claire.

La méthode des différences finies nous a permis de tirer ces conclusions de nos exemples. En effet par les extensions théoriques qu'elle justifie, nous avons pu montrer comment la plupart des problèmes thermoélastiques sont bien posés au sens mathématique du mot. Moyennant cette certitude le physicien peut mener ses calculs avec sureté et rigueur.

°°°

ANNEXE

I.- EXPRESSION DES CONDITIONS AUX LIMITES MECANIQUES EN DIFFERENCES FINIES.

Nous écrivons les conditions aux limites mécaniques sur chaque face en faisant intervenir des points situés sur une bande extérieure au rectangle suivant la figure ci-dessous :

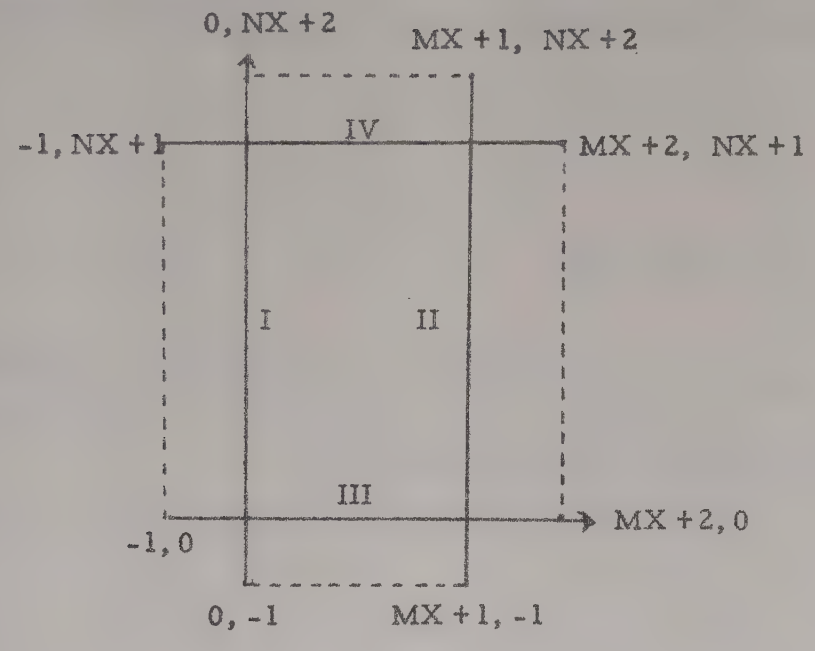


Figure 1

Nous obtenons le système V, en explicitant les normales et l'expression des contraintes face par face :

1.- Face 1.

$$n_j = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad m = 0 \quad n = 0, 1 \ldots NX + 1$$

$$- \sigma_{110, n;p} + A^{(1)}_{11} u_{o, n;p} + A^{(1)}_{12} v_{o, n;p} = C^{(1)}_1$$

$$- \sigma_{120, n;p} + A^{(1)}_{21} u_{o, n;p} + A^{(1)}_{22} v_{o, n;p} = C^{(1)}_2$$

$$\sigma_{11\,0,n;p} = \frac{C}{2k}(v_{o,n+1;p} - v_{o,n-1;p}) + \frac{1}{2h}(u_{1,n;p} - u_{-1,n;p}) - a\,T_{o,n;p}$$

$$\sigma_{12\,0,n;p} = \frac{b}{2}\left(\frac{u_{0,n+1;p} - u_{o,\,n-1;p}}{k} + \frac{v_{1,n;p} - v_{-1,n;p}}{h}\right)$$

Pour n = 1, 2 ... NX nous obtenons des équations explicites qui donnent $u_{-1,n;p}$ et $v_{-1,n;p}$.

Pour n = 0 et NX + 1 nous obtenons quatre équations algébriques.

2.- Face II.

$$n_j = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad m = MX + 1 \qquad n = 0, 1 \ldots NX + 1$$

Nous opérons comme ci-dessus et nous obtenons des équations explicites donnant : $u_{MX+2,n;p}$ et $v_{MX+2,n;p}$ pour n = 1, 2 ...NX et quatre équations algébriques correspondant à n = 0 et NX + 1.

3.- Face III.

$$n_j = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad n = 0 \qquad m = 0, 1 \ldots MX + 1$$

Dans les expressions des contraintes nous changeons le signe des dérivées par rapport à x. Les équations explicites obtenues donnent $u_{m,-1;p}$ et $v_{m,-1;p}$ pour m = 1, 2 ... MX.

m = 0 et MX + 1 donnent quatre nouvelles équations algébriques.

4.- Face IV.

$$n_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad n = NX + 1 \qquad m = 0, 1 \ldots MX + 1.$$

Dans les expressions des contraintes nous changeons le signe des dérivées par rapport à y. Le système explicite donne $u_{m, NX+2 ; p}$ et $v_{m, NX+2 ; p}$ pour $m = 1, 2 \ldots MX$.

$m = 0$ et $MX + 1$ donnent encore quatre équations algébriques.

Le système V est donc constitué par $4(m + n)$ équations explicites ($m = 1, \ldots MX$ et $n = 1, \ldots NX$) et par 16 équations algébriques à 16 inconnues. Ce dernier donne les valeurs de u et de v à l'instant $t = P.p\ell$ aux points :

$(0, -1)\ (-1, 0)\ (MX + 1, -1)\ (-1, NX + 1)\ (MX + 2, 0)\ (0, N + 2)$

$(MX + 1, NX + 2)$ et $(MX + 2, NX + 1)$.

VU et permis d'imprimer

Marseille, le -2 FEV. 1973

Le Président

F. BOREL

BIBLIOGRAPHIE

[1] B.A.BOLEY - J.H.WEINER.
"Theory of thermal stresses.
John Wiley and sons.

[2] W.NOWACKI.
Thermoelasticity.
Oxford Pergamon Press.

[3] P.CHADWICK.
Thermoelasticity - Dynamical Theory.
Progress in Solid Mechanics, I. Inedon Hill, 1964.

[4] H.PARKUS.
Thermoelasticity.
Blaisdell Publishing Company.

[6] H.S.CARSLOW - J.C.JAEGER.
Conduction of Heat in Solids.
Oxford Clarendon Press.

[7] B.A.BOLEY - I.S.TOLINS.
Transient coupled Thermoelastic Boundary value problems in the half space.
Journal of Applied Mechanics, décembre 1962.

[8] OW.DILLON Jr.
Thermoelasticity when the material coupling parameter equals unity.
Journal of Applied Mechanics, juin 1965.

[9] S.G.LEFKOWITZ.
One dimensional, coupled, transient thermoelastic behavior of a semi infinite medium subjected to a step imput of heat.
Thèse 1964, Ohio state University.

[10] C.M.DAFERMOS.
On the existence and the stability of solutions its the equations of linear thermoelasticity.
16, Arch. Rational Mech. Analysis, vol.29, 1968.

[11] J.L.LIONS.
Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites.
Springer - Verlag 1961.

[12] L.V.KANTOROWICH, V.I.KRILOV.
Approximate methods of higher analysis.
Interscience Publishers.

[13] L.COLLATZ.
The numerical treatment of differential Equations.
Springer Verlag.

[14] R.D.RICHTMYER, K.W.MORTON.
Difference Methods for initial value Problems.
Interscience Publishers, 2ème édition.

[15] G.G.O'BRIEN - M.A.HYMAN - S.KAPLAN.
A study of the numerical solution of partial differential equations.
Journal of Mathematics and Physics. Vol. 19, 1951.

[16] F.JOHN.
On integration of parabolic Equations by difference methods.
Communication on pure and applied mathematics, Vol.V, 1952.

[17] H.LEWY.
On the convergence of solutions of difference equations.
In Studies and Essays Courant Anniversary Volume, Interscience, New-York, 1948.

[18] J.V.NEUMANN - R.D.RICHTMYER.
A method for the numerical calculation of hydrodynamic shock.
Journal of Applied Physics, Vol.21, 1950.

[19] P.D.LAX.
Hyperbolic difference Equations : A review of the Courant-Friedrichs-Lewy paper in the light of recent developments.
I.B.M. Journal, mars 1967.

[20] R.COURANT - E.ISAACSON - M.REES.
On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences.
Communication on pure and applied mathematics, vol.5, 1952.

[21] P.D.LAX - R.D.RICHTMYER.
Survey of the stability of linear finite difference equations.
Communications on pure and applied mathematics, vol.IX - 1956.

[22] J.L.LIONS - P.A.RAVIART.
Remarques sur la récolution et l'approximation d'équations d'évolution couplées.
I.C.C. Bull. 5, 1966.

[23] J.L.LIONS - G.DUVAUT.
Nouvelles inéquations variationnelles rencontrées en thermique et en thermoélasticité.
C.R.Acad. Sc. Paris, 1969.

[24] J.CEA.
Approximation variationnelle des problèmes aux limites.
Ann. Inst. Fourier, Grenoble 14-2, 1964.

[25] P.D.LAX - A.N.MILGRAM.
Parabolic Equations.

[27] P.EXTREMET - N.SEGUIN.
Rapport de stage, 1970, D.E.A. d'Acoustique.

[28] S.S.MANSON.
Les contraintes d'origine thermique.
Traduit par M.Chauvin, Dunaod, Paris 1967.

[29] H.J.LATIERE.
Comptes-Rendus à l'Académie des Sciences, 271, série C, 1970, page 265.

∴